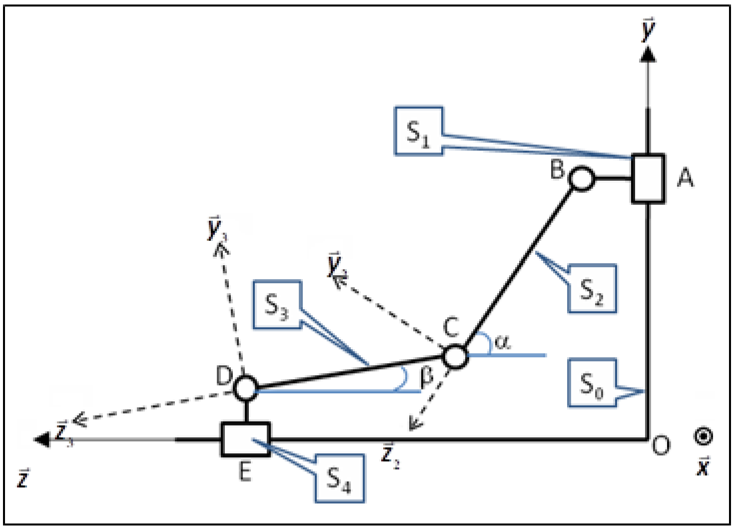
Série N° 2

Exercice 1

Le méchanisme schématisé ci-dessous est constitué d'un socle S_0, de deux coulisseaux $S_1(A,B)$ et $S_4(D,E)$ et deux bras $S_2(B,C)$ et $S_3(C,D)$. Un référentiel $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est lié au socle S_0 alors que les référentiels $R_2(C,\vec{x},\vec{y}_2,\vec{z}_3)$ et $R_3(D,\vec{x},\vec{y}_3,\vec{z}_3)$ sont liés respectivement au bras S_2 et S_3.

Le coulisseau S_1 est en translation selon la direction $\vec{y}$ par rapport au socle S_0 et en liaison pivot d'axe $(B,\vec{x})$ avec le bras S_2. Le coulisseau S_4 est en translation selon la direction $\vec{z}$ par rapport au socle S_0 et en liaison pivot d'axe $(B,\vec{x})$ avec le bras S_3. Le deux bras S_2 et S_3 sont en liaison pivot d'axe $(C,\vec{x})$.
On donne :
$\overrightarrow{AB}=a\vec{z}$; $\overrightarrow{BC}=b\vec{z}_2$; $\overrightarrow{CD}=c\vec{z}_3$; $\overrightarrow{DE}=-d\vec{y}$;
$\overrightarrow{OA}=h(t)\vec{y}$; $\overrightarrow{OE}=l(t)\vec{z}$; $\alpha=(\vec{z},\vec{z}_2)$; $\beta(\vec{z},\vec{z}_3)$
a,b,c et d sont des constantes



1) Déterminer par dérivation les vecteurs vitesses des points A et E par rapport à (R_0).
2) Déterminer par cinématique les vecteurs vitesses : $\overrightarrow{V}(B\in S_1/S_0)$ et $\overrightarrow{V}(D\in S_4/S_0)$.
3) Déterminer par cinématique le vecteur vitesse du point C appartenant à (S_2) en mouvement par rapport à (S_0).
4) Déterminer par cinématique le vecteur vitesse du point C appartenant à (S_3) en mouvement par rapport à (S_0).
5) La condition cinématique au niveau de la liaison pivot, au point C, entre les deux bras (S_3) et $(S_2$ est exprimée par la relation $\overrightarrow{V}(C\in S_3/S_0)=\overrightarrow{V}(B\in S_2/S_0))$. Ecrire le système d'équations projetées sur la base $B_0(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, qui en découle.

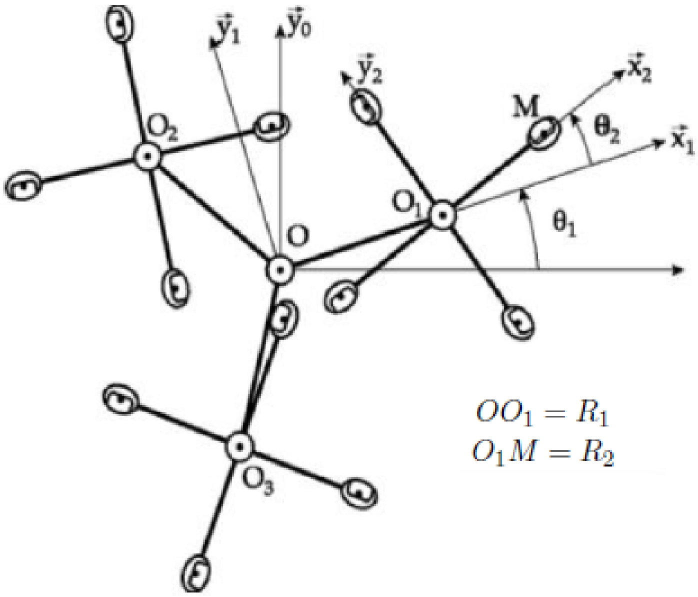
Exercice 2

Le manège pieuvre est un classique des foires. Il procure des sensations par son mouvement épicycloïdal qui produit de fortes accélérations. Nous allons étudier la vitesse d'un des sièges de ce manège, auquel on associe le point M.
Le système mécanique est composé des éléments suivants :

- un bâti fixe (S_0) lié au repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$,
- un bras principal (S_1) lié au repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$ en liaison pivot d'axe (O,z_0) avec le bâti (S_0). Ce mouvement est paramétré par l'angle θ_1,
- un bras secondaire (S_2) lié au repère $R_2(O_1,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_0)$ en rotation d'angle θ_2 par rapport au bras (S_1).

On donne ci dessous un extrait du cahier des charges fonctionnel du manège pieuvre.

Fonction	Critère	Niveau
FS1 : Assurer la sécurité des personnes	1. Vitesse (régime permanent) 2. Accélération (régime permanent)	$V_{max}\leq 6m/s$ $a_{max}\leq 4m/s^2$



En observant le manège tourner en régime permanent, on constate que $\omega_1 = \dot{\theta}_1 = cste$ et $\dot{\theta}_2 = 2\omega_1$.

1) Déterminer le vecteur vitesse du point M appartenant à (S_2) en mouvement par rapport à (S_0).

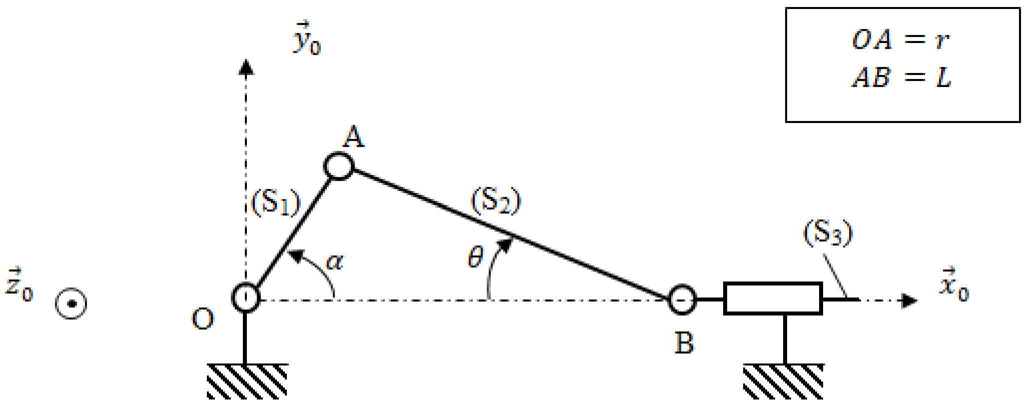
2) Calculer $\|\overrightarrow{V}(M \in S_2/S_0\|$ et indiquer pour quelle valeur de θ_2 cette norme est maximale. En déduire ω_1 pour satisfaire le premier critère exigé par le cahier des charges (on prendra $R_1 = 8m$ et $R_2 = 1m$).

3) Calculer l'accélération $\overrightarrow{\gamma}(M \in S_2/S_0)$.

4) Quelle est la norme de l'accélération maximale subie par un passager ? Conclure quant au respect du cahier des charges.

Exercice 3

La figure ci dessous représente un système de bielle - manivelle. La manivelle (S_1), d'extrémité O et A, tourne autour du point O avec une vitesse angulaire $\dot{\alpha}$ entraînant le mouvement de la bielle (S_2), d'extrémité A et B, et la translation du piston (S_3). Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.



1) Déterminer une relation simple donnant θ en fonction de α, r et L en exprimant que $\overrightarrow{OB}.\vec{y}_0 = 0$.

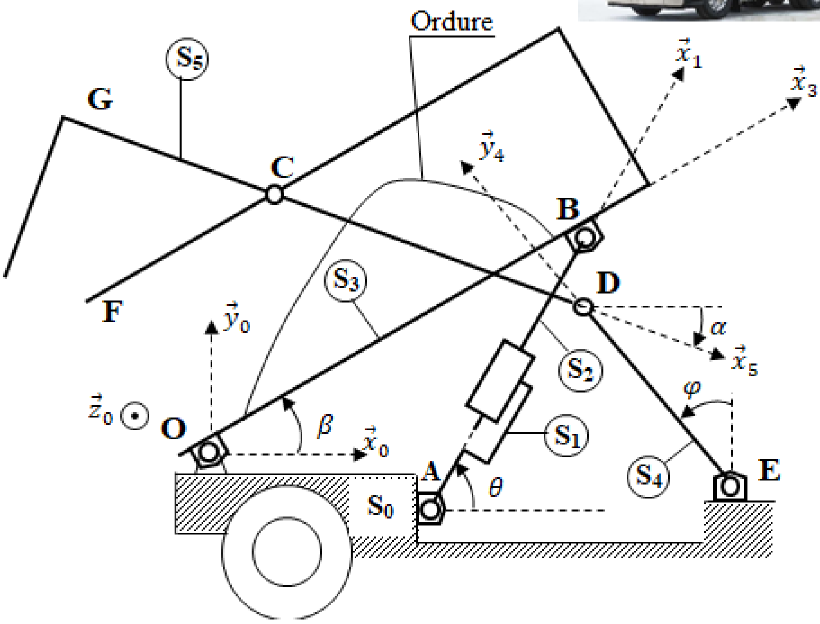
2) Déterminer la vitesse angulaire de la bielle $\dot{\theta}$ en fonction de α, $\dot{\alpha}$, r et L.

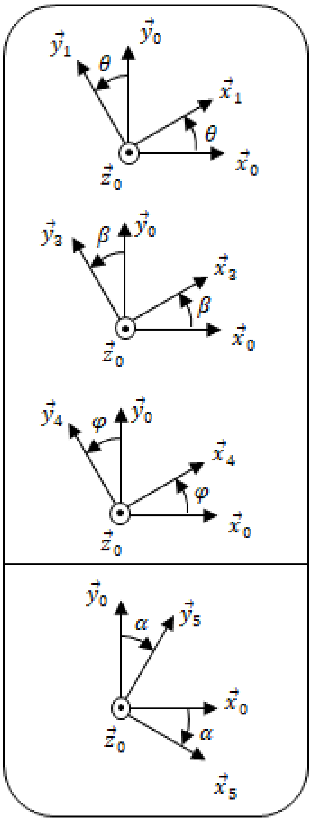
3) Déterminer la vitesse du piston (point B) par rapport à (S_0) et l'exprimer dans R_0 en fonction de $\dot{\alpha}, \alpha, r$ et L.

Exercice 4

On se propose d'étudier le système qui assure l'ouverture d'une benne de camion de ramassage d'ordures et l'évacuation des déchets. Le schéma cinématique de la mise en mouvement du système est fournit sur la figure suivante. Un vérin impose le mouvement du système. L'ensemble se compose :

- d'une chassie (S_0),
- d'un corps de vérin (S_1) en liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_0)$ avec la chassie (S_0),
- d'une tige de vérin (S_2) en liaison glissière d'axe $(A, \vec{x}_1)$ avec le corps (S_1),
- d'une benne (S_3) $(OBCF)$ en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec la chassie (S_0) et en liaison pivot d'axe $(B, \vec{z}_0)$ avec la tige (S_2),
- d'un bras (S_4) (ED) en liaison pivot d'axe $(E, \vec{z}_0)$ avec la chassie (S_0),
- d'un couvercle (S_5) (DCG) en liaison pivot d'axe $(D, \vec{z}_0)$ avec le bras (S_4) et en liaison pivot d'axe $(C, \vec{z}_0)$ avec la benne (S_3).





Les repères et les paramètres du système sont définis comme suit :

- $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère lié à la chassie (S_0),
- $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ repère lié au corps du vérin (S_1), tel que $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$,
- $R_2(B, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ repère lié à la tige du vérin (S_2),
- $R_3(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ repère lié à la benne (S_3), tel que $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$,
- $R_4(E, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0)$ repère lié au bras (S_4), tel que $\varphi = (\vec{x}_0, \vec{x}_4) = (\vec{y}_0, \vec{y}_4)$,
- $R_5(D, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_0)$ repère lié au couvercle (S_5), tel que $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_5) = (\vec{y}_0, \vec{y}_5)$.

Les positions des différents centres des liaisons sont décrites par les relations vectorielles :

$$\overrightarrow{OA} = a\vec{x}_0 - b\vec{y}_0,\ \overrightarrow{AB} = \lambda(t)\vec{x}_1,\ \overrightarrow{OB} = c\vec{x}_3,\ \overrightarrow{BC} = -d\vec{x}_3 + e\vec{y}_3,\ \overrightarrow{ED} = h\vec{y}_4,\ \overrightarrow{CD} = l\vec{x}_5$$

θ, β, φ, α et λ sont des paramètres variables en fonction du temps. a, b, c, d, e, h et l sont des constantes positives.

1) Représenter le graphe de liaison du système et donner son type.

2) Déterminer : $\overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0)$, $\overrightarrow{\Omega}(S_2/S_0)$, $\overrightarrow{\Omega}(S_3/S_0)$, $\overrightarrow{\Omega}(S_4/S_0)$ et $\overrightarrow{\Omega}(S_5/S_0)$

3) Déterminer, en fonction de $\dot{\beta}$, le vecteur vitesse du point B appartenant à (S_3) par rapport à R_0.

4) Déterminer, par cinématique, le vecteur vitesse du point C appartenant à (S_3) par rapport à (R_0).

5) Déterminer, le vecteur vitesse du point B appartenant à (S_2) par rapport à R_0.

6) La condition cinématique au niveau de la liaison pivot, au point B, entre la benne (S_3) et la tige de vérin (S_2) est exprimée par la relation $\overrightarrow{V}(B \in 3/R_0) = \overrightarrow{V}(B \in 2/R_0)$. Ecrire le système d'équations projetées sur la base $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, qui en découle.

7) Déterminer, en fonction de $\dot{\varphi}$, le vecteur vitesse du point D appartenant à (S_4) par rapport à R_0.

8) Déterminer, par cinématique, le vecteur vitesse du point C appartenant à (S_5) par rapport à R_0.

9) Ecrire la condition cinématique au niveau de la liaison pivot, au point C, entre la benne (S_3) et le couvercle (S_5). En déduire le système d'équations projetées sur la base $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, qui en découle.

Exercice 5

La vitesse des hélicoptères est bien inférieure à celle des avions car elle est limitée par un critère simple : la vitesse en bout de pale ne doit pas dépasser la vitesse du son, soit 340 mètres par seconde. On souhaite déterminer la vitesse maximale théorique d'un hélicoptère.
On considère un hélicoptère (1) se déplaçant à la vitesse horizontale $\overrightarrow{V}(1/0) = V\vec{x}_0$ constante par rapport au sol (0). Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe par rapport au sol et $R_1(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe par rapport à l'hélicoptère, où A est le point au centre du rotor. On note $\overrightarrow{OA} = h\vec{z}_0 + \lambda(t)\vec{x}_0$ où h est une constante.
Le rotor principal (2) de l'hélicoptère comporte 4 pales. Soit $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère en rotation par rapport à R_1 d'un angle θ autour de l'axe $(A, \vec{z}_0)$. On note la vitesse constante du rotor par rapport à l'hélicoptère $\dot{\theta} = \omega$. Soit M le point situé à l'extrèmité d'une pale. $\vec{x}_2$ est choisi tel que $\overrightarrow{AM} = R\vec{x}_2$.

1) Déterminer le vecteur vitesse du point M du rotor (2) par rapport au sol (0).

2) Déterminer l'expression de la vitesse maximale V_{max} en M de 2/0 au cours du mouvement en fonction de V , ω et R, en précisant pour quelle position ce maximum est atteint.

3) Sachant que la vitesse du rotor vaut $\omega = 384 tr/min$, le rayon du rotor (longueur d'une pale) vaut $R = 4.5m$ et que la vitesse de la pale ne doit jamais dépasser la vitesse du son, déterminer la vitesse maximale V de l'hélicoptère par rapport au sol (le résultat sera donné en km/h ; on suppose qu'il n'y a pas de vent).