Chapitre 2 — CINEMATIQUE DES SOLIDES INDEFORMABLES

OBJECTIFS *à lire en fin de chapitre pour s'assurer qu'ils sont atteints !!!*

Au terme de ce chapitre l'étudiant devrait être capable de :

- Maîtriser la dérivation vectorielle ;
- Déterminer le vecteur vitesse d'un point d'un solide par rapport à un autre solide ;
- Déterminer le torseur cinématique d'un solide en mouvement par rapport à un autre solide et identifier le type de mouvement ;
- Ecrire, dans le cas d'une chaîne fermée, la loi entrée sortie et les relations scalaires indépendantes qui découlent de la fermeture cinématique de la chaîne cinématique ;
- Calculer le vecteur glissement en un point de contact de deux solides en mouvement ;
- Décomposer le vecteur instantané de rotation en un vecteur rotation de roulement et un vecteur rotation de pivotement ;
- Identifier un mouvement plan et utiliser les outils de la cinématique graphique pour déterminer le mouvement d'un solide ;
- Déterminer le vecteur accélération d'un point d'un solide par rapport à un autre solide

CONTENU :

1. Champ de vitesse d'un solide

1.1. Vecteur Vitesse Instantanée de Rotation

À chaque point M d'un solide S, on peut associer le vecteur vitesse par rapport au référentiel R par:

$\vec{V}(M)_{/R} =$ .... Ce vecteur est porté par la .... à la .... de M

On définit ainsi un champ vectoriel appelé « champ de vitesse du solide S/R » associant à chaque point matériel P de S le vecteur $\vec{V}(P)_{/R}$. Soient A, B, C et D quatre points matériels de S tels que ($\vec{l_1} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{l_2} = \overrightarrow{CD}$). Le solide étant indéformable, le produit scalaire de ces deux vecteurs est indépendant du temps, i.e.:

.... → .... → ....

La dérivation par rapport au temps est donc une application linéaire .... de l'espace vectoriel à laquelle on peut associer le vecteur noté $\vec{\omega}_{S/R}$ tel que:

$\forall M \in S\ ,\ \forall N \in S,$ ....

Le vecteur $\vec{\omega}_{S/R}$ est le vecteur **V**itesse **I**nstantanée de **R**otation du solide S par rapport au référentiel R.

1.2. Torseur distributeur de vitesse

En partant du résultat obtenu dans la section précédente, stipulant que la dérivation par rapport au temps est une application linéaire antisymétrique et en intercalant dans l'expression l'origine du repère O, on obtient:

$\forall M \in S, \forall N \in S,$ .... $\Rightarrow$ .... $\Rightarrow$ ....

Formule fondamentale de la cinématique des solides (pour les vitesses)

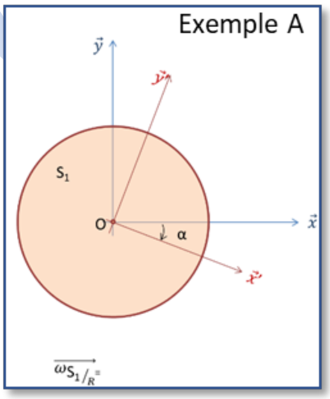
La relation ainsi obtenue montre que le champ de vitesse d'un solide est un champ **antisymétrique** auquel on peut associer le **torseur** appelé "**torseur cinématique**" et noté: $\vartheta_{S/R}\{\overrightarrow{\qquad}\,;\,\overrightarrow{\qquad\quad}\}_P$. Ce torseur est souvent appelé "*torseur des vitesses de S/R*" ou aussi "*torseur distributeur de vitesses de S/R*" … au point P de S.

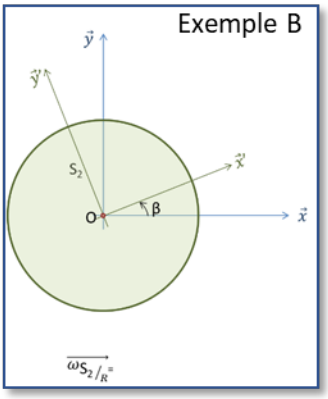
<u>*Intérêt:*</u> *La formule fondamentale de la cinématique des solides nous permet ainsi d'obtenir la vitesse à un point du solide S si on connaît la VIR du solide /R ainsi que la vitesse à un autre point <u>du même solide</u> /R.*

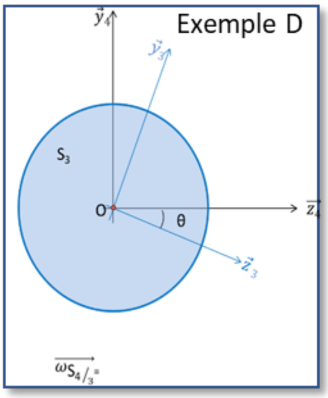
<u>*Note:*</u> *Plusieurs autres notations peuvent être utilisées :* $\vartheta_{S/R}\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\omega_{S/R}}\\ \overrightarrow{V(P)_{S/R}}\end{Bmatrix}_P$; $\vartheta_{S/R}\left[\overrightarrow{\omega_{S/R}}\,;\overrightarrow{V(P)_{S/R}}\right]_P$; … etc

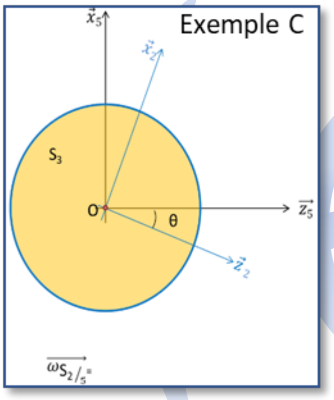
1.3. Détermination de la VIR de R'/R

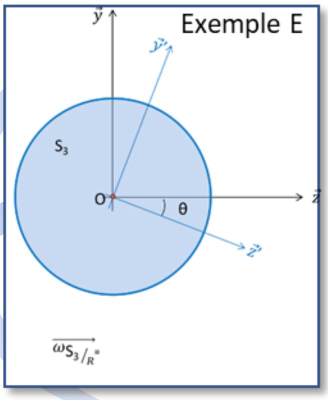
- Norme : La norme du vecteur VIR est la dérivée positive par rapport au temps du paramètre de la rotation (angle).
- Direction et sens (signe) : La VIR de R'/R caractérise la rotation partant de R vers R'. Il faudrait déterminer le sens de cette rotation (de quel vecteur $\vec{a}$ vers quel autre vecteur $\vec{b}$ du <u>même</u> repère R). La direction et le sens de la VIR est donné par le produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

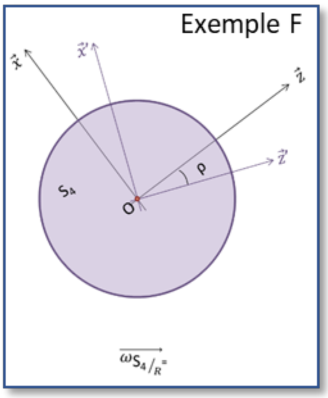












1.4. Quelques propriétés du torseur des vitesses

Comme tout torseur, le torseur cinématique du mouvement du solide indéformable S par rapport au référentiel R est caractérisé par un certain nombre de propriétés dont on cite quelques-unes. Notons par $\overrightarrow{\omega_{S/R}}\ et\ \overrightarrow{V(P)_{S/R}}$ les coordonnées de ce torseur $\vartheta_{S/R}$ en un point P de S.

<u>**Invariant scalaire**</u> : La quantité scalaire $I = \overrightarrow{\omega_{S/R}}.\overrightarrow{V(P)_{S/R}}$ est un invariant scalaire qui ne dépend que du torseur. Il garde la même valeur à tous les points de l'espace.

Démonstration: ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

<u>**Nature et décomposition :**</u> Un torseur des vitesses ne peut être qu'un **couple (si $\overrightarrow{\omega_{S/R}} = \vec{0}$)** ,

un glisseur (si $\overrightarrow{\omega_{S/R}} \neq \vec{0}$ et I=0) ou bien la somme d'un couple est d'un glisseur (si $I \neq 0$).

Démonstration: ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

....

....

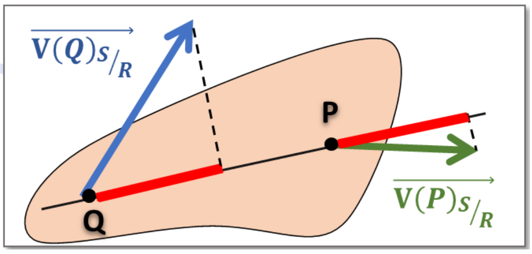
....

....

....

....

Équiprojectivité : Si on considère deux points quelconques de S dans son mouvement /R. Les 2 projections des 2 vitesses /R de ces 2 points sur la droite les reliant sont égales. Il s'agit ici de l'équiprojectivité qui caractérise tout torseur.



Démonstration: ....

....

Axe central: L'ensemble des points M du solides S, ayant une vitesse $\overrightarrow{V(M)_{S/R}}$ parallèle au vecteur du torseur $\overrightarrow{\omega_{S/R}}$ est appelé « axe central » ou aussi « axe de vissage » du torseur $\vartheta_{S/R}$. L'axe central Δ du torseur $\vartheta_{S/R}$ est la droite parallèle à $\overrightarrow{\omega_{S/R}}$ et passant par le point P tel que : $\overrightarrow{QP} = \dfrac{\overrightarrow{\omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{V(Q)_{S/R}}}{\left(\omega_{S/R}\right)^2}$; Q étant n'importe quel point de S ayant une vitesse connue /R.

Démonstration: ....

....

....

....

....

....

....

....

....

De plus, le moment sur l'axe central est constant et minimal en norme.

Démonstration: ....

....

....

....

1.5. Formule de la base mobile

Puisque pour tous points M et N de S on a : $\frac{d(\overrightarrow{MN})}{dt}/_R = \vec{\omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{MN}$, nous pouvons écrire cette relation pour tout vecteur lié à S: $\forall \vec{u}$ lié à $S, \frac{d}{dt_{/R}}(\vec{u})=$ .... Formule de la base mobile

et en particulier pour les vecteurs de base du repère R_1 lié à S:

$\frac{d}{dt_{/R}}(\vec{i_1})$ = ... ; $\frac{d}{dt_{/R}}(\vec{j_1})$ = ... ; $\frac{d}{dt_{/R}}(\vec{k_1})$ = ...

1.6. Dérivation composée d'un vecteur

Soit le vecteur $\vec{a}$, de composantes (x, y, z) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et (x', y', z') dans le repère $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$. La dérivée de $\vec{a}$ par rapport au temps s'écrit dans chacun des repères comme suit:

$\frac{d(\vec{a})}{dt}/_R$= (...............) $\vec{i}$ + (...............) $\vec{j}$ + (...............) $\vec{k}$ et $\frac{d(\vec{a})}{dt}/_{R'}$= (...............) $\vec{i}'$+ (...............) $\vec{j}'$ + (...............) $\vec{k}'$

Cependant, la dérivée dans le repère R peut s'écrire différemment en utilisant l'expression de $\vec{a}$ dans le repère R' :

$\frac{d(\vec{a})}{dt}/_R$=.. ⇒

$\frac{d(\vec{a})}{dt}/_R$=.. ⇒

$\frac{d(\vec{a})}{dt}/_R$=.. Formule fondamentale de calcul en cinématique

Intérêt: La formule fondamentale de calcul en cinématique nous permet d'obtenir la dérivée d'un vecteur dans un référentiel à partir de sa dérivée dans un deuxième référentiel et de la vitesse instantanée de rotation du deuxième référentiel par rapport au premier.

1.7. Propriétés du vecteur vitesse instantanée de rotation

Propriété no.1 : $\boxed{\vec{\omega}_{R'/R} = -\vec{\omega}_{R/R'}}$

Démonstration: ....

....

....

....

Propriété no.2 : $\boxed{\vec{\omega}_{R''/R} = \vec{\omega}_{R''/R'} + \vec{\omega}_{R'/R}}$

....

....

....

....

2. Champ d'accélération d'un solide

À chaque point M d'un solide S, on peut associer un vecteur « accélération » défini par rapport au référentiel R par:

$\vec{\gamma}(M)_{/R}$ = ... = ...

Pour un deuxième point N du même solide, le vecteur accélération est donné par:

$\vec{\gamma}(N)_{/R}$ = ... ⇒

$\vec{\gamma}(N)_{/R}$ = ... ⇒

$\vec{\gamma}(N)_{/R}$ = ... ⇒

$\vec{\gamma}(N)_{/R}$ = ... ⇒

Le résultat obtenu montre que le champ des accélérations d'un solide **n'est pas** un champ antisymétrique. Il n'est donc pas le champ de moment d'un torseur et on **ne** parlera **pas** ainsi d'un torseur des accélérations comme ça a été le cas pour les vitesses.

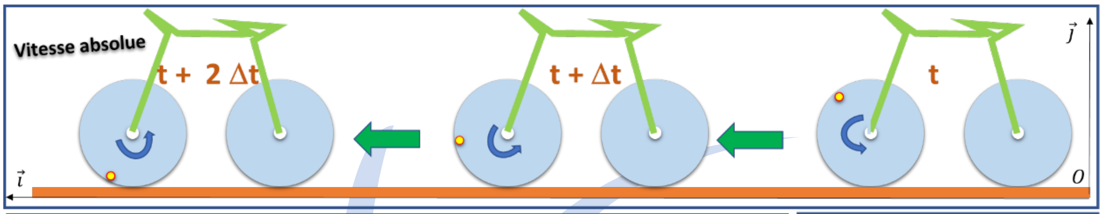
3. Composition du mouvement d'un solide

3.1. Composition des vitesses

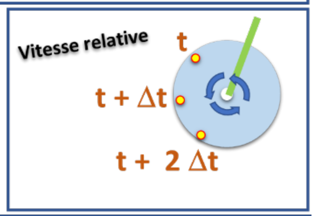
Si le mouvement du solide S / R $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est relativement complexe, la vitesse de tout point M de S / R peut être décomposée en faisant intervenir un deuxième repère $R_1(O_1, \vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$. Ainsi la vitesse /R serait appelée vitesse « .... ». Elle serait la somme de :

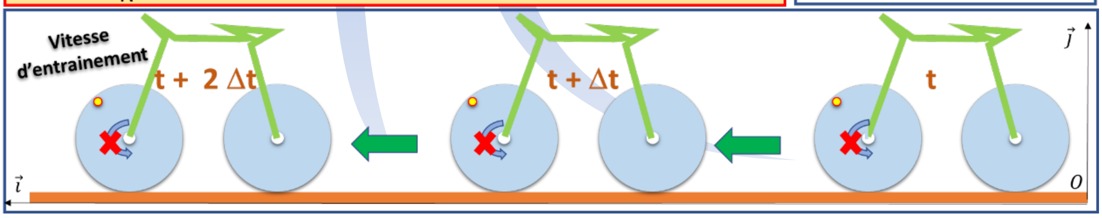
- la vitesse .... (par apport au repère .... R_1)

- et la vitesse d'.................................... (par rapport au repère initial R mais en supposant que S est .... R_1, donc M ...... R_1). D'où le mot « entrainement ». Car S (et donc M) est supposé être entrainé par R_1 dans son mouvement par rapport à R. Elle est notée $\vec{V}(M \in R_1)_{/R}$ ou $\vec{V}(M)_{R_1/R}$. Elle est également appelée vitesse du point coïncidant.



$\vec{V}(M)_{/R}$	=	$\vec{V}(M)_{/R_1}$	+	$\vec{V}(M)_{R_1/R}$
	=		+	
$\vec{V}(M)_{/R}$	=	$\vec{V}(M)_{/R_1}$	+	$\vec{V}(M \in R_1)_{/R}$





Analytiquement, si on intercale l'origine O_1 de R_1 dans l'expression de la vitesse de M /R … on obtient :

....

....

....

De façon plus générale, on peut décomposer le torseur $v_{S/R}\left(\overrightarrow{\omega_{S/R}}, \overrightarrow{V(P)_{S/R}}\right)$ en la somme de deux torseurs :

$$v_{S/R}\left(\overrightarrow{\omega_{S/R}}, \overrightarrow{V(P)_{S/R}}\right)_P = v_{\ /}\left(\overrightarrow{\omega_{\ /}}, \overrightarrow{V(P)_{\ /}}\right)_P + v_{\ /}\left(\overrightarrow{\omega_{\ /}}, \overrightarrow{V(P)_{\ /}}\right)_P$$

3.2. Propriétés de la vitesse d'entrainement

Propriété no.1 : $\boxed{\vec{V}(M)_{R/R_1} = -\vec{V}(M)_{R_1/R}}$

***Démonstration**:* ....

....

....

....

Propriété no.2 : $\boxed{\vec{V}(M)_{R/R_2} = \vec{V}(M)_{R/R_1} + \vec{V}(M)_{R_1/R_2}}$

....

....

....

....

3.3. Composition des accélérations

L'accélération d'un point M du solide S par rapport au référentiel R$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ peut être décomposée, de façon similaire aux vitesses, en faisant intervenir un deuxième repère R$_1(O_1,\vec{i_1},\vec{j_1},\vec{k_1})$ et ce, en fait en intercalant l'origine du deuxième repère dans l'expression de la vitesse du point M. On obtient ainsi :

$$\vec{\gamma}(M)_{/R}=\frac{d\left[\vec{V}(M)_{/R}\right]}{dt}\Big/_R=\frac{d\left[\vec{V}(M)_{/R_1}+\vec{V}(O_1)_{/R}+\vec{\omega}_{R_1/R}\wedge\overrightarrow{O_1M}\right]}{dt}\Big/_R$$

$$=\frac{d\left[\vec{V}(O_1)_{/R}\right]}{dt}\Big/_R+\frac{d\left[\vec{V}(M)_{/R_1}\right]}{dt}\Big/_R+\frac{d\left[\vec{\omega}_{R_1/R}\wedge\overrightarrow{O_1M}\right]}{dt}\Big/_R$$

$$=\vec{\gamma}(O_1)_{/R}+\left(\frac{d\left[\vec{V}(M)_{/R_1}\right]}{dt}\Big/_{R_1}+\vec{\omega}_{R_1/R}\wedge\vec{V}(M)_{/R_1}\right)+\left(\frac{d\,\vec{\omega}_{R_1/R}}{dt}\Big/_R\wedge\overrightarrow{O_1M}+\vec{\omega}_{R_1/R}\wedge\frac{d\,\overrightarrow{O_1M}}{dt}\Big/_R\right)$$

$$\boxed{=\vec{\gamma}(O_1)_{/R}+\left(\vec{\gamma}(M)_{/R_1}+\vec{\omega}_{R_1/R}\wedge\vec{V}(M)_{/R_1}\right)+\left(\frac{d\vec{\omega}_{R_1/R}}{dt}\Big/_R\wedge\overrightarrow{O_1M}+\vec{\omega}_{R_1/R}\wedge\left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\Big/_{R_1}+\vec{\omega}_{R_1/R}\wedge\overrightarrow{O_1M}\right)\right)}$$

$$=\vec{\gamma}(O_1)_{/R}+\left(\vec{\gamma}(M)_{/R_1}+\vec{\omega}_{R_1/R}\wedge\vec{V}(M)_{/R_1}\right)+\left(\frac{d\,\vec{\omega}_{R_1/R}}{dt}\Big/_R\wedge\overrightarrow{O_1M}+\vec{\omega}_{R_1/R}\wedge\vec{V}(M)_{/R_1}+\vec{\omega}_{R_1/R}\wedge(\vec{\omega}_{R_1/R}\wedge\overrightarrow{O_1M}\right)$$

$$\underbrace{\vec{\gamma}(M)_{/R}}_{\vec{\gamma}_a}=\underbrace{\vec{\gamma}(M)_{/R_1}}_{\vec{\gamma}_r}+\underbrace{\vec{\gamma}(O_1)_{/R}+\frac{d\,\vec{\omega}_{R_1/R}}{dt}\Big/_R\wedge\overrightarrow{O_1M}+\vec{\omega}_{R_1/R}\wedge(\vec{\omega}_{R_1/R}\wedge\overrightarrow{O_1M})}_{\vec{\gamma}_e}+\underbrace{2\,\vec{\omega}_{R_1/R}\wedge\vec{V}(M)_{/R_1}}_{\vec{\gamma}_c}$$

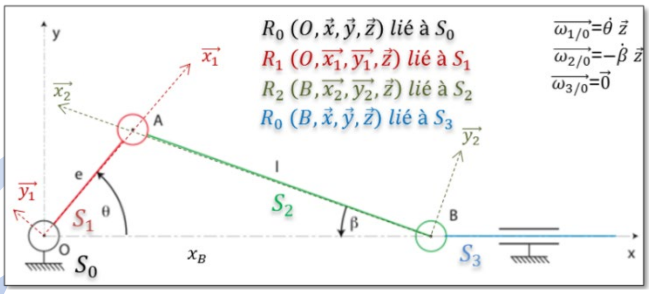
....

4. Fermeture cinématique

- Tout comme les fermetures géométriques, on pourrait écrire autant de fermetures cinématiques qu'il y a de boucles indépendantes dans le graphe de liaisons d'un mécanisme.
- La fermeture cinématique permet d'établir la relation existante entre les vitesses (linéaires et angulaires) du mécanisme … Elle permet donc, entre autres, de déterminer la loi entrée-sortie… mais en vitesses .
- La fermeture cinématique d'une boucle de *N* solides s'écrit par composition des torseurs cinématique... **<u>en un seul et même point P !!!</u>** $\tau_{P(S_1/S_2)}+\tau_{P(S_2/S_3)}+\ldots+\tau_{P(S_N/S_1)}=\left\{\vec{0},\vec{0}\right\}_P$
- Ce qui donne les 2 équations vectorielles : $\overrightarrow{\omega_{1/2}}+\overrightarrow{\omega_{2/3}}+\cdots+\overrightarrow{\omega_{3/1}}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{V(P)_{1/2}}+\overrightarrow{V(P)_{2/3}}+\cdots+\overrightarrow{V(P)_{3/1}}=\vec{0}$
- NB : Afin d'obtenir les relations cinématiques entre les différents paramètres, on peut aussi dériver la fermeture géométrique, cela revient au même que d'écrire la fermeture cinématique !

<u>Application</u> : *retour sur le système « bielle-manivelle »*

… application de la fermeture cinématique



…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

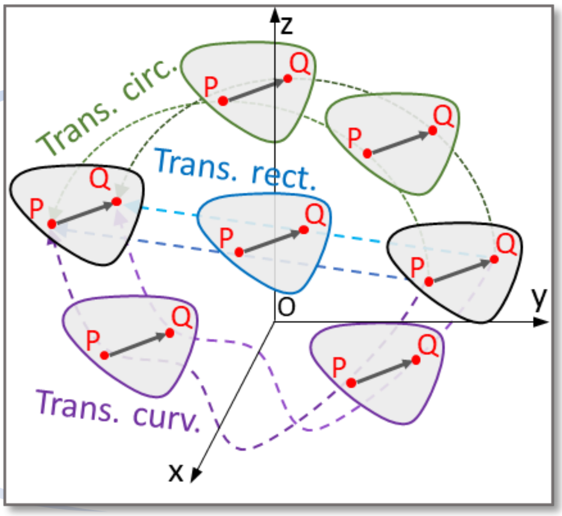
…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

5. Étude des mouvements fondamentaux



5.1. Mouvement de translation

5.1.a. Définition

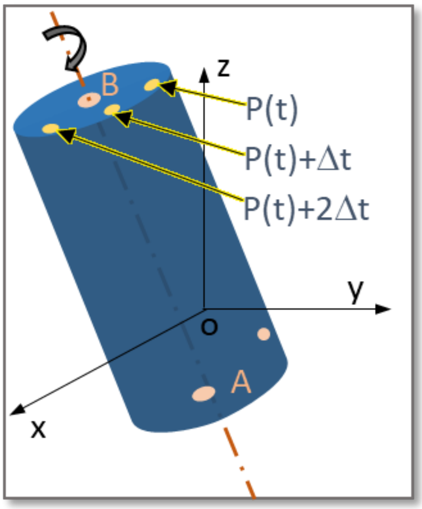
Un solide S est animé par un mouvement de translation par rapport au référentiel R $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ si tout vecteur $\overrightarrow{PQ}$ lié à S garde une direction fixe par rapport à R. Le solide étant indéformable, la norme du vecteur est également constante donc:

$\frac{d(\overrightarrow{PQ})}{dt_{/R}} =$ .... ⇒.. ⇒..

5.1.b. Propriétés

- Dans un mouvement de translation, le vecteur rotation instantanée est ....
- Dans un mouvement de translation, tous les points d'un solide ont ....
- Dans un mouvement de translation, le torseur cinématique est un ....
- Si la trajectoire d'un point M de S est une droite, la translation est dite .... , si elle est un cercle, la translation est dite .... et si elle est quelconque, la translation est dite ....

5.2. Mouvement de « rotation autour d'un axe »



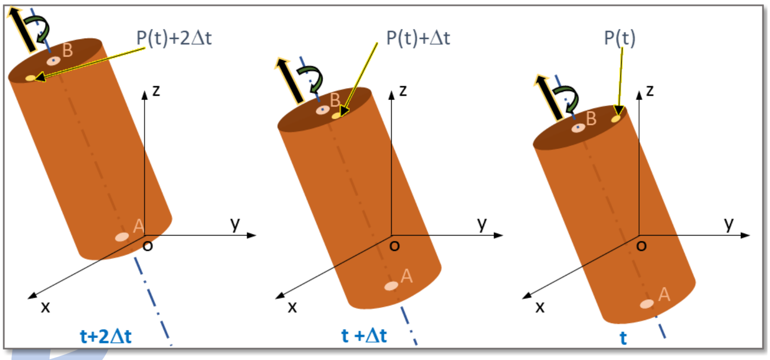
5.2.a. Définition

Un solide S est animé par un mouvement de « rotation autour d'un axe » par rapport au référentiel R $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ s'il existe deux points A et B de S qui restent fixes par rapport à R. L'axe de rotation est la droite Δ (A,B)

5.2.b. Propriétés

- Dans un tel mouvement, le torseur cinématique est un .... associé au vecteur glissant ....
- Dans un tel mouvement, l'axe central est ....
- Dans un tel mouvement, la vitesse centrale est ....

5.3. Mouvement hélicoïdal simple



5.3.a. Définition

Un solide S est animé par un mouvement hélicoïdal simple par rapport au référentiel R$(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ si son mouvement /R est la composition d'une translation rectiligne et d'une rotation autour d'un axe parallèle à la direction de la translation.

5.3.b. Propriétés

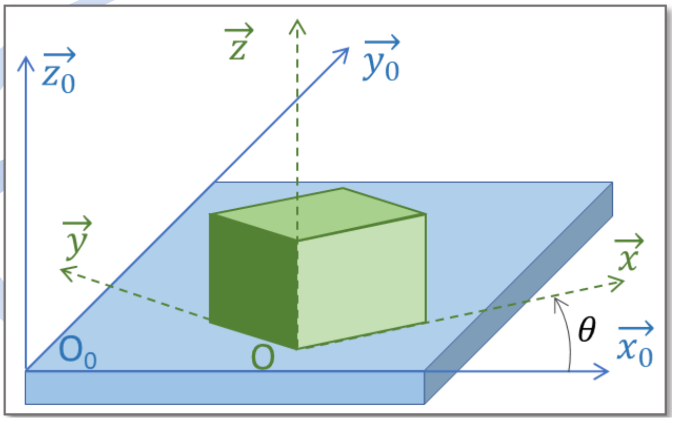
- Dans un tel mouvement, le torseur cinématique est ....
- Dans un tel mouvement, l'axe central est ....
- Dans un tel mouvement, la vitesse centrale est ....
- Dans un tel mouvement, on défini le pas de l'hélice par : ....

....

5.4. Mouvement plan sur plan

5.4.a. Définition

Soient deux référentiels R($O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) et R$_0$($O_0, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}$) liés à deux solides S et S$_0$. Supposons qu'au cours du mouvement de S par rapport à S$_0$, les deux plans P($O, \vec{x}, \vec{y}$) et P$_0$($O_0, \vec{x_0}, \vec{y_0}$) restent confondus. Le mouvement de S par rapport à S$_0$ est alors dit mouvement plan sur plan. Un exemple de ce type de mouvement est montré ci-contre avec $\vec{\omega}_{R/R_0} = \dot{\theta}\,\vec{z}$



5.4.b. Centre instantané de rotation

Désignons par $v_{R/R_0}\left[\vec{\omega}_{R/R_0}\,;\vec{V}\,(O)_{R/R_0}\right]$ le torseur cinématique du mouvement de R par rapport R$_0$. L'axe central de ce torseur existe uniquement si .... L'intersection de cette droite avec le plan P($O, \vec{x}, \vec{y}$) est appelé Centre Instantané de Rotation (CIR). La vitesse de ce point est ....

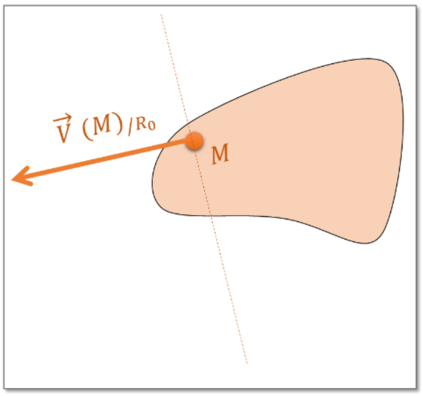
Démonstration: ....

....

....

IMPORTANT: *Le CIR du mouvement de S/R n'est pas nécessairement une « particule matérielle» de S . Il est cependant considéré comme point matériel de S dans le sens où il est cinématiquement lié à S. (exemple : centre d'une roue … vide).*

5.4.c. Recherche géométrique du CIR (cas no. 1)



Désignons par I le CIR du mouvement plan sur plan de R par rapport R$_0$.
Puisque I est un point matériel de S, on peut le relier à n'importe quel autre point de S par .... Ceci donne analytiquement :

.... Ceci implique graphiquement que : ....

Ainsi, I se trouve obligatoirement sur ....

De plus il n'est pas nécessaire de connaitre .... de façon exacte. Il suffit d'en connaitre .... qui est tangente à ....

Ceci n'est toutefois pas suffisant pour localiser complètement I. En fait, il faudrait connaitre la .... de la vitesse ou .... d'un .... de S. On dirait de la même façon que I se trouve obligatoirement sur ....

En conclusion pour localiser géométriquement I, il faudrait :

- Connaitre les 2 .... ou bien les 2 .... de 2 points de S dans son mouvement / R$_0$.
- Ensuite tracer une droite .... à chacune des directions de vitesse ou à chacune des trajectoires.
- Identifier I comme l'intersection des 2 dernières droites.

Note : Le cas où on tombe sur deux points à vitesses / R$_0$ .... *sera traité ultérieurement.*