

Série N° 2

Exercice 1 : Manège pieuvre

Le manège pieuvre est un classique des foires. Il procure des sensations par son mouvement épicycloïdal qui produit de fortes accélérations. Nous allons étudier la vitesse d'un des sièges de ce manège, auquel on associe le point M.

Le système mécanique est composé des éléments suivants :

- un bâti (S_0) lié au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$,
- un bras principal (S_1) lié au repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ en liaison pivot d'axe (O, z_0) avec le bâti (S_0). Ce mouvement est paramétré par l'angle θ_1 ,
- un bras secondaire (S_2) lié au repère $R_2(O_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ en rotation d'angle θ_2 par rapport au bras (S_1).

On donne ci dessous un extrait du cahier des charges fonctionnel du manège pieuvre.

Fonction	Critère	Niveau
FS1 : Assurer la sécurité des personnes	1. Vitesse (régime permanent)	$V_{max} \leq 6m/s$
	2. Accélération (régime permanent)	$a_{max} \leq 4m/s^2$

En observant le manège tourner en régime permanent, on constate que $\omega_1 = \dot{\theta}_1 = cste$ et $\dot{\theta}_2 = 2\omega_1$.

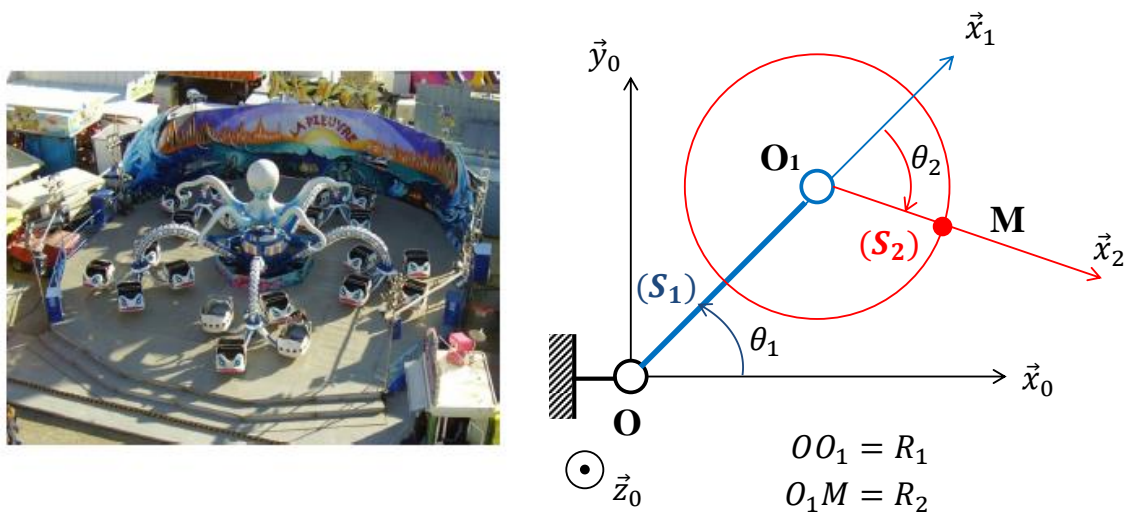


FIGURE 1 – Schéma cinématique minimal du manège

- 1) Déterminer par dérivation le vecteur vitesse du point O_1 appartenant à (S_1) en mouvement par rapport à (S_0).
- 2) Déterminer par cinématique le vecteur vitesse du point M appartenant à (S_2) en mouvement par rapport à (S_0).
- 3) Calculer $\|\vec{V}(M \in S_2/S_0)\|$ et indiquer pour quelle valeur de θ_2 cette norme est maximale. En déduire ω_1 pour satisfaire le premier critère exigé par le cahier des charges (on prendra $R_1 = 8m$ et $R_2 = 1m$).
- 4) Calculer l'accélération $\vec{\gamma}(M \in S_2/S_0)$.
- 5) Quelle est la norme de l'accélération maximale subie par un passager ? Conclure quant au respect du cahier des charges.

Exercice 2 : Centrifugeuse de laboratoire

Afin d'accélérer le processus de précipitation ou de séparation de composés dans l'industrie alimentaire, dans les laboratoires pharmaceutiques ou les laboratoires de chimie, les produits sont placés en centrifugeuse.

Ces processus qui auraient mis plusieurs jours à s'effectuer sous la seule gravité terrestre mettent quelques minutes lorsque l'éprouvette est soumise à une accélération de 10 000 G.



On considère une centrifugeuse composée d'un bâti (S_0), d'un bras (S_1) et d'une éprouvette (S_2) qui peut contenir deux liquides de masses volumiques différentes.

Sous l'effet centrifuge dû à la rotation du bras (S_1), l'éprouvette (S_2) s'incline pour se mettre pratiquement dans l'axe du bras et le liquide dont la masse volumique est la plus élevée va au fond de l'éprouvette. Ainsi la séparation des deux liquides est réalisée. On considère les repères suivants :

- $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié à (S_0).
- $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S_1). Ce solide admet une rotation par rapport au solide (S_0) d'axe (O, \vec{z}_0) tel que $\theta = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ avec $\theta = \omega.t$ et ω étant une constante positive exprimée en radians par seconde. On pose $\overrightarrow{OA} = a\vec{x}_1$.
- $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ soit lié à (S_2). Ce solide admet une rotation par rapport à (S_1) d'axe (A, \vec{y}_1) telle que $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. Soit B le centre de gravité de (S_2) tel que $\overrightarrow{AB} = b\vec{x}_2$ (b constante positive exprimée en mètre)

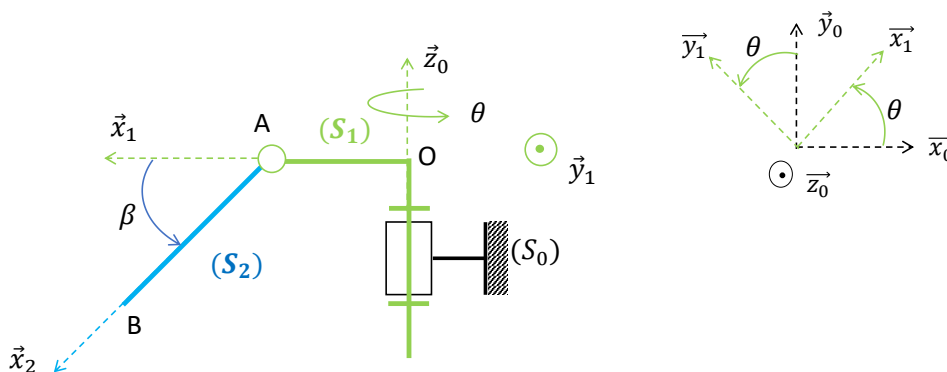


FIGURE 2 – Schéma cinématique minimal de la centrifugeuse

- 1) Déterminer les vecteurs instantanés de rotation des mouvements de S_1/S_0 , S_2/S_1 et S_2/S_0 .
- 2) Déterminer le vecteur vitesse du point A de (S_1/S_0). En déduire $\vec{V}(A \in S_2/S_0)$.
- 3) Déterminer le vecteur accélération du point A de (S_1/S_0).
- 4) Déterminer par cinématique le vecteur vitesse $\vec{V}(B \in S_2/S_0)$. Retrouver ce vecteur par composition du mouvement.
- 5) Déterminer par plusieurs méthodes le vecteur accélération du point B du S_2/S_0 .
- 6) Lorsque la machine tourne à vitesse constante $\dot{\theta} = \omega$, l'angle β reste constant. Déterminer la valeur numérique de l'accélération du point B appartenant à l'éprouvette, par rapport au bâti de la centrifugeuse pour une vitesse de rotation de $200tr/min$. On donne $OA = 15cm$, $AB = 10cm$ et $\beta = 10^\circ$.

Exercice 3 : Pont élévateur hydraulique

Un pont élévateur hydraulique est un appareil de manutention qui permet de lever ou d'abaisser une charge lourde pour la placer à la bonne hauteur afin de faciliter le travail.

La figure ci-contre représente le schéma cinématique du pont élévateur. Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié à S_0 . La plate-forme S est en mouvement de translation d'axe (A, \vec{y}_0) par rapport au bâti S_0 .

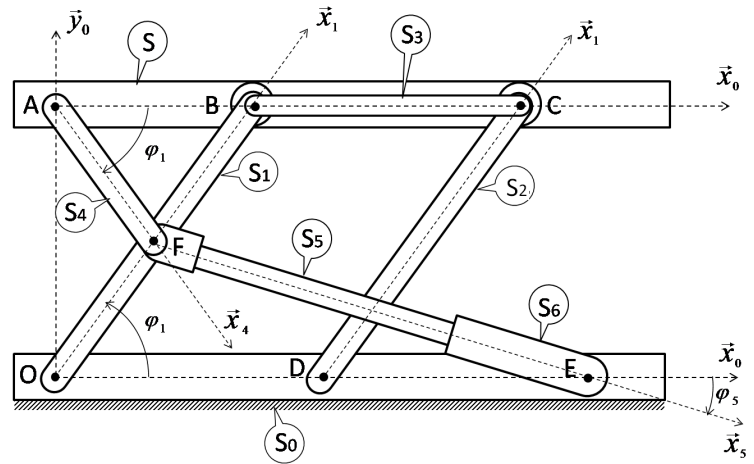


FIGURE 3 – Schéma cinématique minimal d'un pont élévateur

On donne ci dessous un extrait du cahier des charges fonctionnel du pont élévateur.

Fonction	Critère	Niveau
FS1 : Permettre de monter une charge lourde	Temps nécessaire	$t \leq 30 \text{ s}$
FS2 : Assurer la sécurité du travailleur	Vitesse de montée et descente	$V \leq 15 \text{ cm/s}$

Le mécanisme est constitué des éléments suivants :

- d'un bras $S_1(OFB)$ qui est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) avec S_0 ;
- d'un bras S_2 qui est en liaison pivot d'axe (D, \vec{z}_0) avec S_0 ;
- d'un bras S_3 qui est en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_0) avec S_1 et d'axe (C, \vec{z}_0) avec S_2 ;
- d'un vérin (S_6, S_5) , le corps S_6 est en liaison pivot d'axe (E, \vec{z}_0) avec S_0 et la tige du vérin S_5 présente une liaison glissière d'axe (F, \vec{x}_5) avec S_6 d'une part et en liaison pivot d'axe (F, \vec{z}_0) avec S_1 d'autre part ;
- d'un levier S_4 qui en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_0) avec la plate forme S . S_4 est aussi en liaison pivot d'axe (F, \vec{z}_0) avec la tige du vérin S_5 .

Les repères $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$, $R_2(D, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$, $R_3(B, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, $R_4(F, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0)$ et $R_5(F, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_0)$ sont liés respectivement aux solides S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5 . On donne :

$$\vec{OB} = \vec{DC} = l\vec{x}_1 ; \vec{OF} = \frac{l}{2}\vec{x}_1 ; \vec{AF} = \frac{l}{2}\vec{x}_4 ; \vec{FE} = \lambda(t)\vec{x}_5 ; \vec{OE} = a\vec{x}_0$$

- 1) Ecrire la fermeture géométrique de la chaîne cinématique fermée $(S_0, S_1, S_5, S_6, S_0)$. En déduire l'expression de λ en fonction de φ_1 .
- 2) Déduire les positions extrêmes λ_{max} et λ_{min} ainsi que la course $\Delta\lambda$ lorsque φ_1 varie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Déterminer la vitesse minimale du vérin qui permet de vérifier le critère imposé par le cahier des charges fonctionnel. (A.N. : $l = 1,5 \text{ m}$; $a = 2,5 \text{ m}$)
- 3) Déterminer le torseur cinématique du mouvement de S_3 par rapport à S_0 en B . Quelle est la nature de ce mouvement.
- 4) Déterminer en fonction de φ_1 le torseur cinématique du mouvement de S_1 par rapport à S_0 en F .
- 5) Déterminer le torseur cinématique du mouvement de S_4 par rapport à S_0 en A .
- 6) Exprimer dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le torseur cinématique du mouvement de S par rapport à S_0 en A . Quelle est la nature de ce mouvement.
- 7) Quelle condition doit vérifier la vitesse angulaire $\dot{\varphi}_1$ pour assurer la sécurité du travailleur.

Exercice 4 : Pompe hydraulique à pistons axiaux et à débit variable

Dans ce type de pompe, les pistons sont logés dans un barillet lié à l'arbre d'entrée. Un système de réglage de l'inclinaison du plateau, qui est fixe pendant la phase d'utilisation de la pompe, permet de faire varier le débit du fluide en sortie de la pompe.

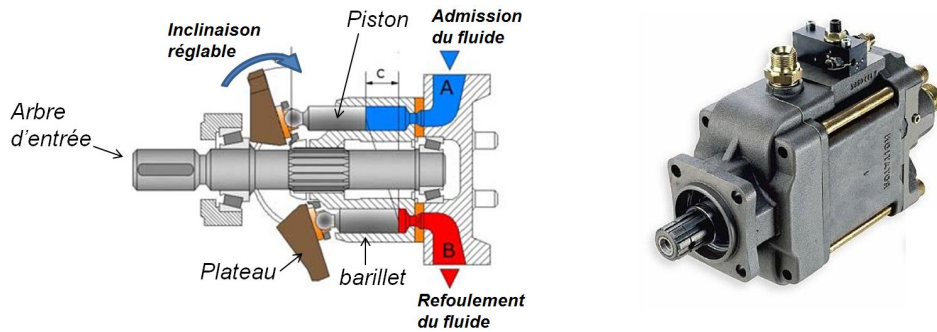


FIGURE 4 – Pompe hydraulique à pistons axiaux et à débit variable

Le débit de la pompe est réglé, lorsque l'inclinaison du plateau est fixée. On présente ci contre le schéma cinématique minimal de la pompe (un seul piston représenté). La rotation de (1/0) entraîne une translation alternative de (2/1). C'est cette translation qui assure la compression du fluide.

Un ressort non représenté assure le maintien du contact du piston 2 avec le corps 0 au point A.

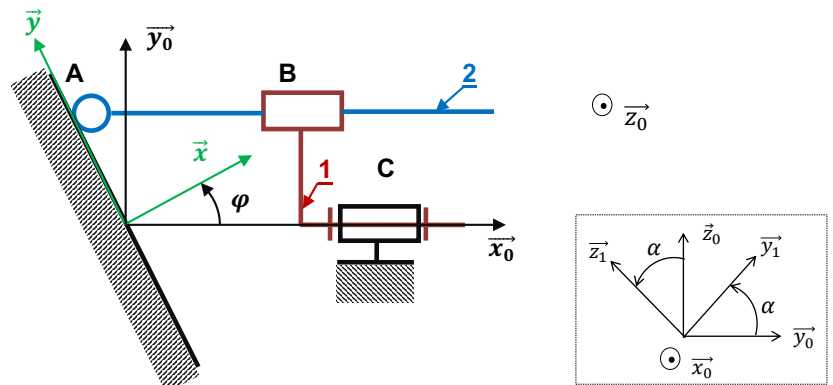


FIGURE 5 – Schéma cinématique minimal du mécanisme

On associe les repères :

- $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$ au bâti (0), tels que $\vec{OC} = c\vec{x}_0$ et $\varphi = (\vec{x}_0, \vec{x})$.
- $R_1(O, \vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, lié à la manivelle (1), tel que $\vec{CB} = b\vec{x}_0 + r\vec{y}_1$ et $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$,
- $R_2(O, \vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ au coulisseau 2, tel que $\vec{BA} = \lambda\vec{x}_0$.

Le torseur cinématique de la liaison ponctuelle entre (2) et (0) est exprimé au point A et dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$ par la forme :

$$\{\vartheta(2/0)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{Bmatrix}_A^{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)}$$

- 1) Donner le graphe de liaison de ce système.
- 2) Donner le paramètre d'entrée et le paramètre de sortie du système.
- 3) Déterminer les torseurs cinématiques des liaisons au point B et C.
- 4) Déterminer, à l'aide d'une fermeture cinématique, les expressions des composantes du torseur cinématique $\{\vartheta(2/0)\}_A$. En déduire la loi entrée-sortie en vitesse du système.
- 5) Le débit instantané Q correspond au volume de fluide poussé par le piston lorsqu'il avance. Il est exprimé en fonction de la surface S de la section du piston et $\dot{\lambda}$, ($Q = \dot{\lambda}.S$). En déduire l'expression de ce débit instantané en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée.
- 6) Indiquer la façon dont il faut faire évoluer l'inclinaison du plateau pour diminuer le débit de la pompe.

Exercice 5 : Etude cinématique d'une presse hydraulique

Une presse hydraulique est une machine qui fournit une grande force de compression. Elle transmet un déplacement et un effort démultiplié afin d'écraser ou de déformer un objet. La presse représentée sur le schéma ci dessous possède une chaîne cinématique composée du vérin de corps (1) et de tige (2), d'un levier (3), d'un maneton (4) et du piston (5). Ce dernier exerce l'effort de compression désiré.

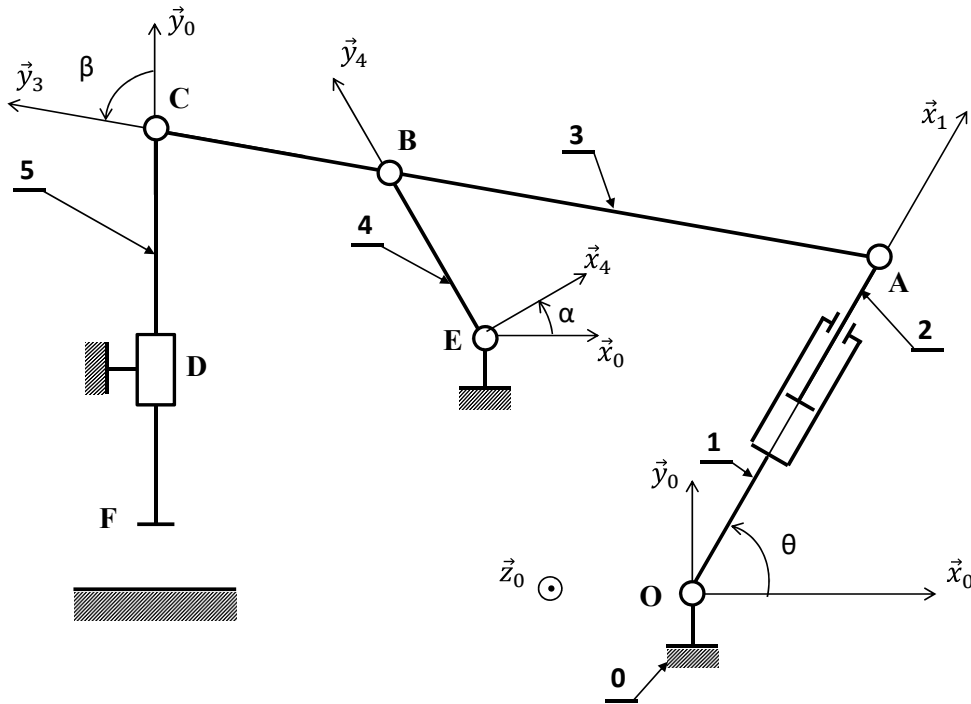


FIGURE 6 – Schémas cinématique minimal d'une presse hydraulique

On propose les repères suivants :

- $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au bâti (0) ;
- $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ et $R_2(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ sont liés respectivement au corps (1) et la tige (2) du vérin, avec $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$;
- $R_3(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ est lié au levier (3), avec $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$;
- $R_4(E, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0)$ est lié au maneton (4), avec $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_4) = (\vec{y}_0, \vec{y}_4)$;
- $R_5(D, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au piston (5).

On donne :

$$\vec{OA} = \lambda \vec{x}_1, \vec{AC} = L \vec{y}_3, \vec{BC} = a \vec{y}_3, \vec{EB} = b \vec{y}_4, \vec{FD} = \eta \vec{y}_0, \vec{OE} = -c \vec{x}_0 + h \vec{y}_0, \vec{DE} = d \vec{x}_0$$

$\lambda, \eta, \alpha, \beta$ et θ sont des paramètres variables en fonction du temps ; L, a, b, c, d et h sont les constantes positives.

Objectif

L'objectif du travail proposé est de déterminer la vitesse minimale de la tige de vérin qui permet de vérifier le critère imposé par le cahier des charges ci dessous.

Exigence technique	Critère	Niveau
FS1 : Réaliser une forme dans une pièces	Vitesse de déplacement du piston	≥ 20 cm/s

- 1) Déterminer le vecteur vitesse de la tige de vérin : $\vec{V}(A \in 2/1)$.
- 2) Déterminer par composition du mouvement le vecteur vitesse du point A appartenant à (2) en mouvement par rapport à (0).
- 3) En déduire le vecteur vitesse du point C appartenant à (3) en mouvement par rapport à (0).
- 4) Déterminer le torseur cinématique, au point F , du piston (5) dans son mouvement par rapport au bâti (0).
- 5) Écrire la condition cinématique au centre C de la liaison pivot entre le piston (5) et le levier (3). Déduire par projection sur la base B_0 du repère R_0 , le système d'équation qui en découle.
- 6) Exprimer dans la base B_0 le vecteur vitesse du point B appartenant à (3) dans son mouvement par rapport à (0). Les composantes seront exprimées en fonction de $\dot{\eta}$, $\dot{\beta}$ et β .
- 7) Déterminer le torseur cinématique, au point E , du maneton (4) dans son mouvement par rapport à 0. En déduire le vecteur vitesse $\vec{V}(B \in 4/0)$.
- 8) Déduire deux relations scalaires entre $\dot{\eta}$, $\dot{\beta}$ et $\dot{\alpha}$.

On propose maintenant d'étudier le système au moment de la percussion avec la pièce.

On donne :

$$\alpha = \frac{\pi}{6} ; \beta = \frac{2\pi}{3} ; \theta = \frac{\pi}{2} ; \lambda = \frac{1}{2} ; a = \frac{2}{5} ; b = \frac{1}{4} ; L = 1$$

- 9) Récrire les relations obtenues dans les questions 5 et 8. En déduire une relation entre $\dot{\lambda}$ et $\dot{\eta}$.
- 10) Déterminer la vitesse minimale de la tige de vérin qui permet de vérifier le critère imposé par le cahier des charges.

Exercice 6 : Robot de traite

Le robot de traite "Astronaut" est un système de traite automatique assurant, d'une part, la traite des vaches et, d'autre part, l'alimentation et le contrôle de la qualité du lait. Le système de manoeuvre du robot (support de cette étude), est la partie principale du système de traite. Ce système (représenté par le schéma cinématique plan de la figure 3) assure le positionnement correct des gobelets pour leur branchement sur les trayons de la vache pour extraire du lait.



FIGURE 7 – Robot de traite "Astronaut"

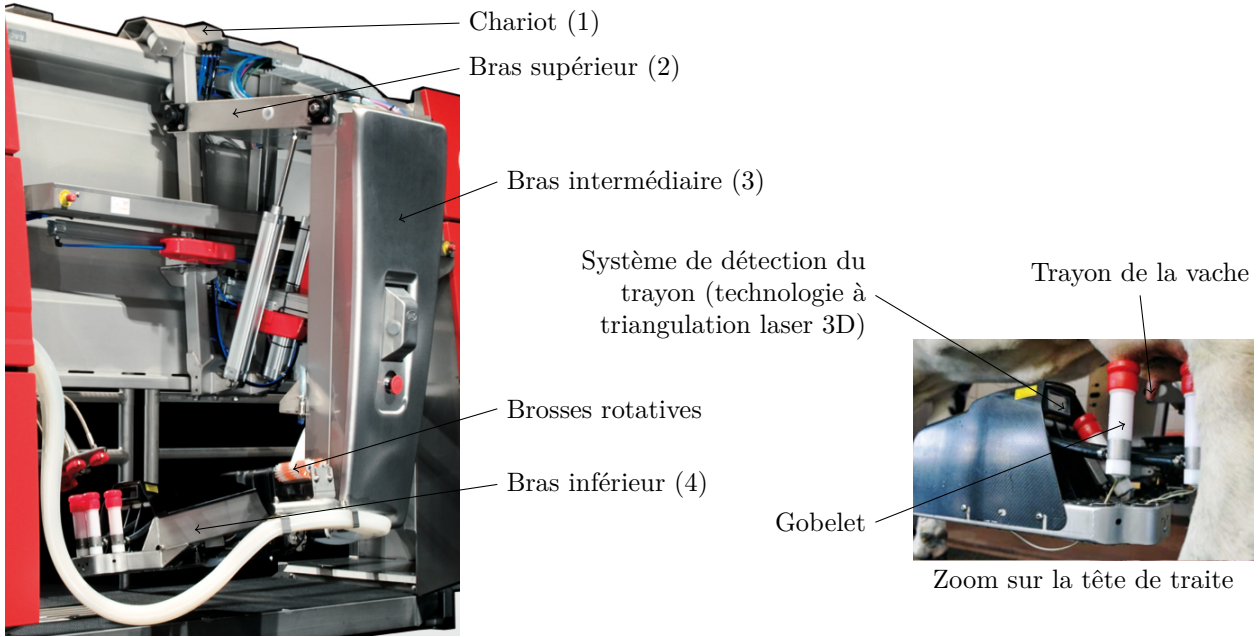


FIGURE 8 – Système de positionnement de la tête de traite

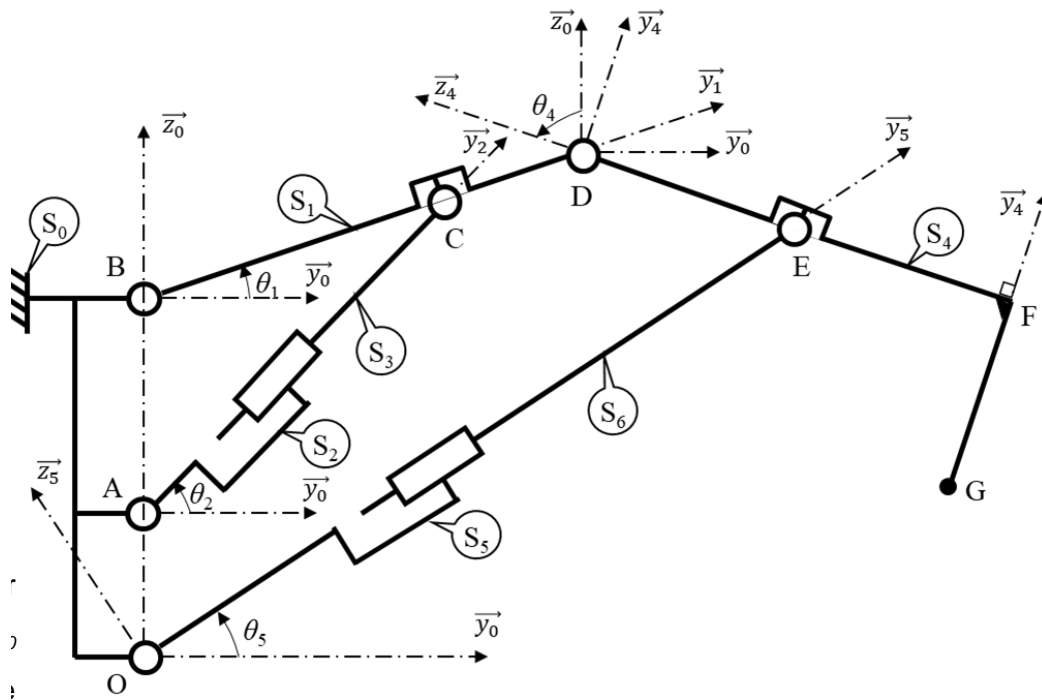


FIGURE 9 – Schéma cinématique minimal du robot

Ce système est composé des éléments suivants :

- Un bâti-support S_0 fixe par rapport au sol. Soit le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ associé.
- Un bras S_1 , en liaison pivot d'axe (B, \vec{x}_0) avec le bâti S_0 et en liaison pivot d'axe (D, \vec{x}_0) avec le bras S_4 . Soit $R_1(B, \vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié au bras S_1 tel que : $(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \theta_1$. L'extrémité du bras S_4 (point G) porte le système de branchement aux trayons, le système pulsateur, le système de nettoyage des trayons (brosses) et la tête de traite. Soit $R_4(B, \vec{x}_0, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ un repère lié au bras S_4 tel que : $(\vec{y}_0, \vec{y}_4) = (\vec{z}_0, \vec{z}_4) = \theta_4$.
- Un vérin (S_2, S_3) dont le corps S_2 est en liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_0) avec le bâti S_0 alors que sa tige S_3 est, d'une part, en liaison glissière d'axe (A, \vec{y}_2) avec S_2 et d'autre part, en liaison pivot

d'axe (C, \vec{x}_0) avec le bras S_1 . Soit $R_2(A, \vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié au corps du vérin S_2 tel que : $(\vec{y}_0, \vec{y}_2) = (\vec{z}_0, \vec{z}_2) = \theta_2$.

— Un vérin (S_5, S_6) dont le corps S_5 est en liaison pivot d'axe (O, \vec{x}_0) avec le bâti S_0 alors que sa tige S_6 est, d'une part, en liaison glissière d'axe (O, \vec{y}_5) avec S_5 et d'autre part, et en liaison pivot d'axe (E, \vec{x}_0) avec le bras S_4 . Soit $R_5(O, \vec{x}_0, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$ un repère lié au corps du vérin S_5 tel que : $(\vec{y}_0, \vec{y}_5) = (\vec{z}_0, \vec{z}_5) = \theta_5$.

On donne :

$$\begin{aligned} \vec{OB} &= b\vec{z}_0; \vec{BD} = k\vec{y}_1; \vec{OA} = a\vec{z}_0; \vec{AC} = \lambda(t)\vec{y}_2; \\ \vec{CD} &= l\vec{y}_1; \vec{GF} = c\vec{y}_4; \vec{FE} = d\vec{z}_4; \vec{OE} = \mu(t)\vec{y}_5; \vec{ED} = h\vec{z}_4; \end{aligned}$$

(b, k a, l, c, d et h : constantes)

L'objectif du travail est de vérifier si le critère suivant concernant la vitesse du point G de la tête de traite peut être respecté.

Fonction	Critère	Niveau
FS1 : Assure le positionnement correct des gobelets	Vitesse de la tête de traite	$V_G \leq 10cm/s$

- 1) Dresser le graphe de liaisons du système de manoeuvre du robot et donner la nature de la chaîne.
- 2) Déterminer les vecteurs suivants $\vec{\omega}_{i/j}$ étant la vitesse instantanée de rotation du mouvement du solide S_i para rapport au solide S_j : $\vec{\omega}_{1/0}, \vec{\omega}_{2/0}, \vec{\omega}_{3/2}, \vec{\omega}_{4/0}, \vec{\omega}_{5/0}$ et $\vec{\omega}_{6/5}$.
- 3) Déterminer, par cinématique des solides, $\vec{V}(C)_{1/0}$ et $\vec{V}(D)_{1/0}$.
- 4) Déterminer la nature du torseur cinématique du mouvement de S_1/S_0 ainsi que son axe central (s'il existe).
- 5) Déterminer par composition du mouvement le torseur cinématique du mouvement de S_3 par rapport à S_0 au point C en fonction de $\lambda, \dot{\lambda}$ et $\dot{\theta}_2$.
- 6) Ecrire la condition cinématique au point C . Déduire par projection sur la base du repère R_0 , le système d'équations qui en découle et vérifier que $\dot{\lambda} = (k - 1)\dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)$.
- 7) Par cinématique, déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide S_4 par rapport au solide S_0 au point E . Donner la nature de ce torseur et déterminer si son axe central (s'il existe) passe par le point E .
- 8) Par composition des vitesses, déterminer en fonction de $\mu, \dot{\mu}$ et θ_5 , la vitesse $\vec{V}(E \in S_6/S_0)$
- 9) Ecrire la condition cinématique au point E . Déduire par projection sur la base du repère R_0 , le système d'équations qui en découle et vérifier que $\dot{\mu} = h\dot{\theta}_4 \cos(\theta_4 - \theta_5) + k\dot{\theta}_1 \sin(\theta_5 - \theta_1)$.
- 10) Par cinématique, déterminer la vitesse $\vec{V}(G \in S_4/S_0)$ en fonction de $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_4$.
- 11) Afin de simplifier l'étude du pilotage du robot à l'aide des 2 vérins, nous supposons que vers l'approche de la position finale, le vérin (S_2, S_3) est bloqué ($\lambda = cte; \theta_1 = cte; \theta_2 = cte$) et que seulement le vérin (S_5, S_6) influence la valeur de θ_4 .
 - a) Exprimer $\dot{\theta}_4$ en fonction de $\dot{\mu}, \theta_4$ et θ_5 .
 - b) Déterminer $\left\| \vec{V}(G \in 4/0) \right\|$ en fonction de $\dot{\theta}_4$.
 - c) Quelle est la condition sur $\dot{\mu}$ pour que le critère relatif à la fonction FS1 soit respecté ?