Série N° 2

Exercice 1 : Manège pieuvre

Le manège pieuvre est un classique des foires. Il procure des sensations par son mouvement épicycloïdal qui produit de fortes accélérations. Nous allons étudier la vitesse d'un des sièges de ce manège, auquel on associe le point M.

Le système mécanique est composé des éléments suivants :

- un bâti (S_0) lié au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$,
- un bras principal (S_1) lié au repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ en liaison pivot d'axe (O, z_0) avec le bâti (S_0). Ce mouvement est paramétré par l'angle θ_1,
- un bras secondaire (S_2) lié au repère $R_2(O_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ en rotation d'angle θ_2 par rapport au bras (S_1).

On donne ci dessous un extrait du cahier des charges fonctionnel du manège pieuvre.

Fonction	Critère	Niveau
FS1 : Assurer la sécurité des personnes	1. Vitesse (régime permanent)	$V_{max} \leq 6m/s$
	2. Accélération (régime permanent)	$a_{max} \leq 4m/s^2$

En observant le manège tourner en régime permanent, on constate que $\omega_1 = \dot{\theta}_1 = cste$ et $\dot{\theta}_2 = 2\omega_1$.

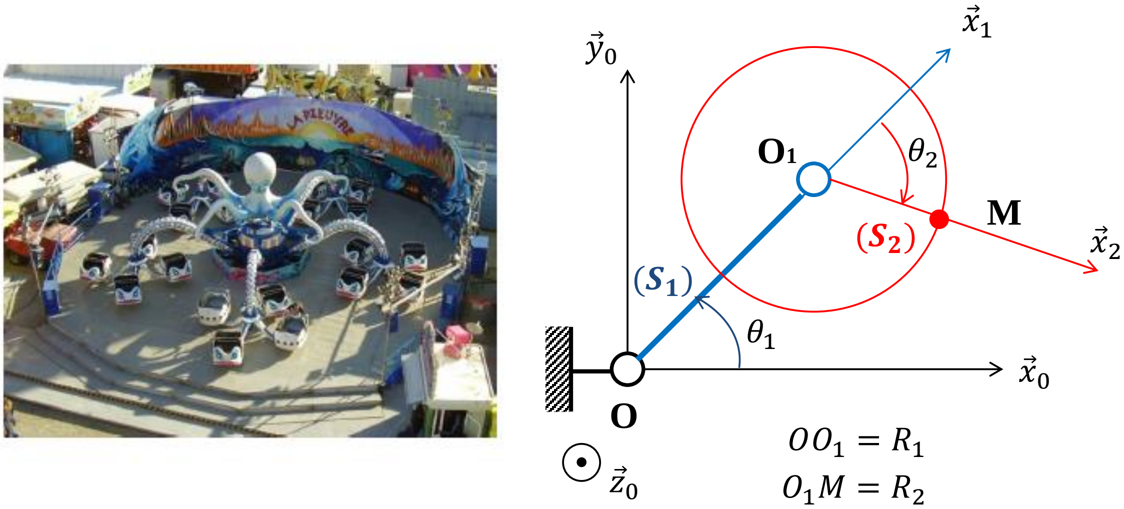


FIGURE 1 – Schéma cinématique minimal du manège

1) Déterminer par dérivation le vecteur vitesse du point O_1 appartenant à (S_1) en mouvement par rapport à (S_0).

2) Déterminer par cinématique le vecteur vitesse du point M appartenant à (S_2) en mouvement par rapport à (S_0).

3) Calculer $\|\overrightarrow{V}(M \in S_2/S_0)\|$ et indiquer pour quelle valeur de θ_2 cette norme est maximale. En déduire ω_1 pour satisfaire le premier critère exigé par le cahier des charges (on prendra $R_1 = 8m$ et $R_2 = 1m$).

4) Calculer l'accélération $\overrightarrow{\gamma}(M \in S_2/S_0)$.

5) Quelle est la norme de l'accélération maximale subie par un passager ? Conclure quant au respect du cahier des charges.

Exercice 2 : Centrifugeuse de laboratoire

Afin d'accélérer le processus de précipitation ou de séparation de composés dans l'industrie alimentaire, dans les laboratoires pharmaceutiques ou les laboratoires de chimie, les produits sont placés en centrifugeuse.
Ces processus qui auraient mis plusieurs jours à s'effectuer sous la seule gravité terrestre mettent quelques minutes lorsque l'éprouvette est soumise à une accélération de 10 000 G.

On considère une centrifugeuse composée d'un bâti (S_0), d'un bras (S_1) et d'une éprouvette (S_2) qui peut contenir deux liquides de masses volumiques différentes.
Sous l'effet centrifuge dû à la rotation du bras (S_1), l'éprouvette (S_2) s'incline pour se mettre pratiquement dans l'axe du bras et le liquide dont la masse volumique est la plus élevée va au fond de l'éprouvette. Ainsi la séparation des deux liquides est réalisée. On considère les repères suivants :

— $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié à (S_0).

— $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ un repère lié à (S_1). Ce solide admet une rotation par rapport au solide (S_0) d'axe $(O, \vec{z}_0)$ tel que $\theta = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ avec $\theta = \omega.t$ et ω étant une constante positive exprimée en radians par seconde. On pose $\overrightarrow{OA} = a\vec{x}_1$.

— $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$ soit lié à (S_2). Ce solide admet une rotation par rapport à (S_1) d'axe $(A, \vec{y}_1)$ telle que $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. Soit B le centre de gravité de (S_2) tel que $\overrightarrow{AB} = b\vec{x}_2$ (b constante positive exprimée en mètre)

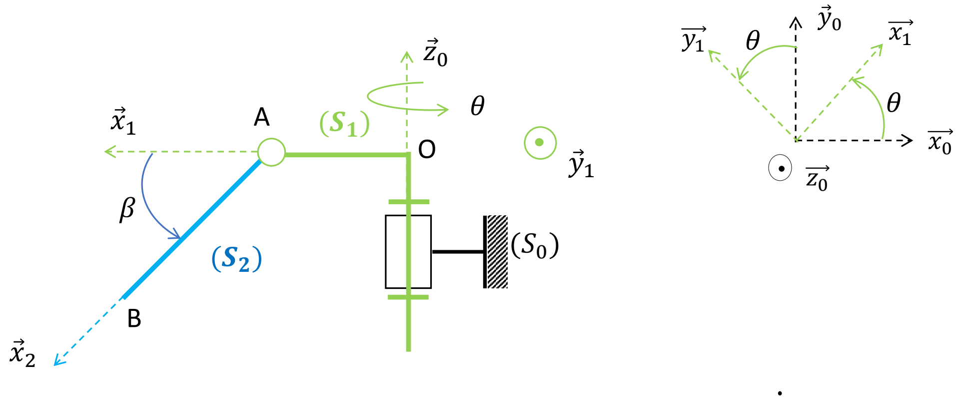


FIGURE 2 – Schéma cinématique minimal de la centrifugeuse

1) Déterminer les vecteurs instantanés de rotation des mouvements de S_1/S_0 , S_2/S_1 et S_2/S_0.

2) Déterminer le vecteur vitesse du point A de (S_1/S_0). En déduire $\vec{V}(A \in S_2/S_0)$.

3) Déterminer le vecteur accélération du point A de (S_1/S_0).

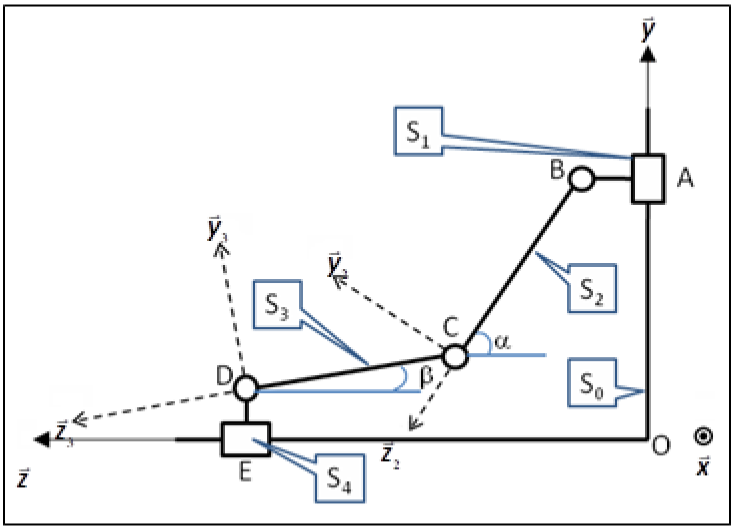
4) Déterminer par cinématique le vecteur vitesse $\vec{V}(B \in S_2/S_0)$.

5) Lorsque la machine tourne à vitesse constante $\dot{\theta} = \omega$, l'angle β reste constant. Déterminer dans ce cas le vecteur accélération du point B du S_2/S_0.

6) Déterminer la valeur numérique de l'accélération du point B appartenant à l'éprouvette, par rapport au bâti de la centrifugeuse pour une vitesse de rotation de $200 tr/min$. On donne $OA = 15cm$, $AB = 10cm$ et $\beta = 10°$.

Exercice 3

Le méchanisme schématisé ci-dessous est constitué d'un socle S_0, de deux coulisseaux $S_1(A,B)$ et $S_4(D,E)$ et deux bras $S_2(B,C)$ et $S_3(C,D)$. Un référentiel $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est lié au socle S_0 alors que les référentiels $R_2(C,\vec{x},\vec{y}_2,\vec{z}_3)$ et $R_3(D,\vec{x},\vec{y}_3,\vec{z}_3)$ sont liés respectivement au bras S_2 et S_3.



Le coulisseau S_1 est en translation selon la direction $\vec{y}$ par rapport au socle S_0 et en liaison pivot d'axe $(B,\vec{x})$ avec le bras S_2. Le coulisseau S_4 est en translation selon la direction $\vec{z}$ par rapport au socle S_0 et en liaison pivot d'axe $(B,\vec{x})$ avec le bras S_3. Le deux bras S_2 et S_3 sont en liaison pivot d'axe $(C,\vec{x})$.

On donne :
$\overrightarrow{AB} = a\vec{z}$; $\overrightarrow{BC} = b\vec{z}_2$; $\overrightarrow{CD} = c\vec{z}_3$; $\overrightarrow{DE} = -d\vec{y}$;
$\overrightarrow{OA} = h(t)\vec{y}$; $\overrightarrow{OE} = l(t)\vec{z}$; $\alpha = (\vec{z},\vec{z}_2)$; $\beta(\vec{z},\vec{z}_3)$
a,b,c et d sont des constantes

1) Déterminer par dérivation les vecteurs vitesses des points A et E par rapport à (R_0).

2) Déterminer par cinématique les vecteurs vitesses : $\vec{V}(B \in S_1/S_0)$ et $\vec{V}(D \in S_4/S_0)$.

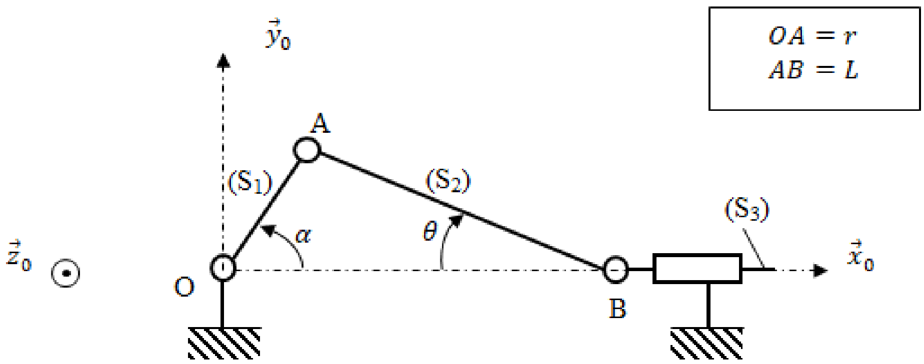
3) Déterminer par cinématique le vecteur vitesse du point C appartenant à (S_2) en mouvement par rapport à (S_0).

4) Déterminer par cinématique le vecteur vitesse du point C appartenant à (S_3) en mouvement par rapport à (S_0).

5) La condition cinématique au niveau de la liaison pivot, au point C, entre les deux bras (S_3) et $(S_2$ est exprimée par la relation $\vec{V}(C \in S_3/S_0) = \vec{V}(B \in S_2/S_0))$. Ecrire le système d'équations projetées sur la base $B_0(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, qui en découle.

Exercice 4

La figure ci dessous représente un système de bielle - manivelle. La manivelle (S_1), d'extrémité O et A, tourne autour du point O avec une vitesse angulaire $\dot{\alpha}$ entraînant le mouvement de la bielle (S_2), d'extrémité A et B, et la translation du piston (S_3). Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.



1) Déterminer une relation simple donnant θ en fonction de α, r et L en exprimant que $\overrightarrow{OB}.\vec{y}_0 = 0$.

2) Déterminer la vitesse angulaire de la bielle $\dot{\theta}$ en fonction de α, $\dot{\alpha}$, r et L.

3) Déterminer la vitesse du piston (point B) par rapport à (S_0) et l'exprimer dans R_0 en fonction de $\dot{\alpha}, \alpha, r$ et L.

Exercice 5

La vitesse des hélicoptères est bien inférieure à celle des avions car elle est limitée par un critère simple : la vitesse en bout de pale ne doit pas dépasser la vitesse du son, soit 340 mètres par seconde. On souhaite déterminer la vitesse maximale théorique d'un hélicoptère.
On considère un hélicoptère (1) se déplaçant à la vitesse horizontale $\overrightarrow{V}(1/0) = V\vec{x}_0$ constante par rapport au sol (0). Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe par rapport au sol et $R_1(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe par rapport à l'hélicoptère, où A est le point au centre du rotor. On note $\overrightarrow{OA} = h\vec{z}_0 + \lambda(t)\vec{x}_0$ où h est une constante.
Le rotor principal (2) de l'hélicoptère comporte 4 pales. Soit $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère en rotation par rapport à R_1 d'un angle θ autour de l'axe $(A, \vec{z}_0)$. On note la vitesse constante du rotor par rapport à l'hélicoptère $\dot{\theta} = \omega$. Soit M le point situé à l'extrèmité d'une pale. $\vec{x}_2$ est choisi tel que $\overrightarrow{AM} = R\vec{x}_2$.

1) Déterminer le vecteur vitesse du point M du rotor (2) par rapport au sol (0).

2) Déterminer l'expression de la vitesse maximale V_{max} en M de 2/0 au cours du mouvement en fonction de V , ω et R, en précisant pour quelle position ce maximum est atteint.

3) Sachant que la vitesse du rotor vaut $\omega = 384tr/min$, le rayon du rotor (longueur d'une pale) vaut $R = 4.5m$ et que la vitesse de la pale ne doit jamais dépasser la vitesse du son, déterminer la vitesse maximale V de l'hélicoptère par rapport au sol (le résultat sera donné en km/h ; on suppose qu'il n'y a pas de vent).