MSI - Série n° 3 (cinématique)

Exercice 1 :

Le système mécanique (figure 1) est composé des éléments suivants :

- Un bâti fixe (S_0),
- Un solide (S_1) composé d'un demi-disque de rayon r_1 et d'une tige (OE). Le solide (S_1) est en liaison glissière d'axe $(O,\vec{x}_0)$ avec le bâti (S_0),
- Une roue (S_2) de rayon r_2 en contact ponctuel de normale $(K,\vec{y}_0)$ avec (S_1) et en liaison pivot d'axe $(B,\vec{z}_0)$ avec le bâti (S_0),
- Un disque (S_3) de rayon r_3 en contact ponctuel de normale $(I,\vec{x})$ avec (S_1) et en liaison pivot d'axe $(G,\vec{z}_0)$ avec (S_4),
- Une tige (S_4) en liaison glissière d'axe $(J,\vec{y}_0)$ avec (S_0).

Soient les repères, $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, $R_1(A,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, $R_2(B,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_0)$ et $R_3(G,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_0)$ respectivement liés au solides (S0), (S1), (S2) et (S3).

Le repère R$(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z}_0)$ est choisi tel que l'axe $(A,\vec{x})$ passe par le point de contact I.

On pose $\beta=(\vec{x}_0,\vec{x}_2)$, $\theta=(\vec{x}_0,\vec{x})$, $\varphi=(\vec{x}_0,\vec{x}_3)$, $\overrightarrow{OA}=\mu\vec{x}_0$, $\overrightarrow{OH}=a\,\vec{x}_0$ (H est la projection de G_3 sur l'axe $(O,\vec{x}_0)$) .$\overrightarrow{GJ}=\lambda\,\vec{y}_0$, $\overrightarrow{HJ}=b\,\vec{y}_0$, avec a et b sont des constantes.

On suppose que le système mécanique est en mouvement dans le plan $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$, le solide (S_2) effectue un mouvement de rotation sans glissement avec (S_1) et le disque (S_3) effectue un mouvement de rotation avec glissement avec (S_1).

1) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{OH}$ en fonction de μ, r_1, r_3 *et* θ. En déduire une relation entre $\dot{\mu}$ *et* $\dot{\theta}$
2) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{HJ}$ en fonction de λ, r_1, r_3 *et* θ. En déduire une relation entre $\dot{\lambda}$ *et* $\dot{\theta}$.
3) Déterminer les vecteurs rotations instantanées :, $\vec{\Omega}_{S1/S0}$, $\vec{\Omega}_{S2/S0}$, $\vec{\Omega}_{S3/S0}$ et $\vec{\Omega}_{S4/S0}$.

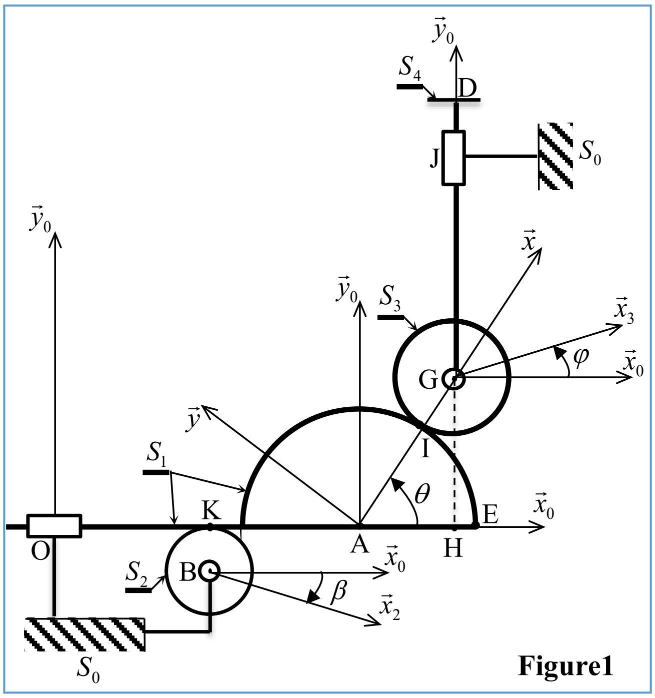


Figure1

4) Déterminer le vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}_{S_3/S_1}$. En déduire les vecteurs rotations instantanées de pivotement et de roulement du mouvement de (S_3) par rapport à (S_1).
5) Déterminer en fonction $\theta, \dot{\theta}$, r_1 et r_3, le vecteur vitesse $\vec{V}_{A\in S1/S0}$.
6) En utilisant la condition de roulement sans glissement au point K, déterminer une relation entre $\dot{\beta}$ *et* $\dot{\theta}$.
7) Déterminer le torseur cinématique, au point G, du mouvement de (S_3) par rapport à (S_0). En déduire l'équation vectorielle du centre instantané de rotation (CIR) de (S_3)/(S_0)
8) Déterminer, par la cinématique des solides, le vecteur vitesse $\vec{V}_{I\in S3/S0}$.
9) Déterminer la vitesse de glissement, au point I, du mouvement de (S_3) par rapport à (S_1). Exprimer le résultat dans la base de R.
10) Déterminer (sans calcul) les CIR de (S_2)/(S_0), (S_3)/(S_4) et (S_2)/(S_1).

Exercice 2

La figure 2 représente le schéma cinématique d'un système mécanique de suspension de véhicules automobiles dans un garage pour effectuer des interventions de maintenance. Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère lié au sol S_0. Le poussoir S_5, solidaire à la plate-forme portant le véhicule, est en liaison glissière d'axe $(D,\ \vec{x}_0)$ par rapport à R_0. Soit $R_5(H,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère lié au poussoir S_5. Le mouvement de translation du poussoir S_5 est assuré par le levier S_3, par l'intermédiaire du galet S_4. Le galet S_4, de rayon R, a une liaison pivot d'axe $(C,\ \vec{z}_0)$ avec le levier S_3 et une liaison ponctuelle de normale $(I,\ \vec{x}_0)$ avec le poussoir S_5. Soit $R_4(C,\vec{x}_4,\vec{y}_4,\vec{z}_0)$ un repère lié à S_4 tel que : $\alpha=(\vec{x}_0,\vec{x}_4)$ le levier S_3 est en liaison pivot d'axe $(A,\ \vec{z}_0)$ avec le sol S_0. Soit $R_3(A,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_0)$ un repère lié à S_3 tel que : $\beta=(\vec{x}_0,\vec{x}_3)$

. Le mouvement de rotation du levier S_3 est assuré par le vérin (S_1, S_2). Le corps du vérin S_1 est en liaison pivot d'axe $(O,\ \vec{z}_0)$ avec le sol S_0. Soit $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$ un repère lié à S_1 tel que $\gamma=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)$. La tige du vérin S_2 présente une liaison pivot d'axe $(B,\ \vec{z}_0)$ avec S_3 et en liaison glissière d'axe $(J,\ \vec{x}_1)$ avec S_1. Soit $R_2(J,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$ un repère lié à S_2.

On note : $\left\|\overrightarrow{OA}\right\|=l_1$, $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=l_2$, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=l_3$, $\left\|\overrightarrow{BJ}\right\|=l_4$,

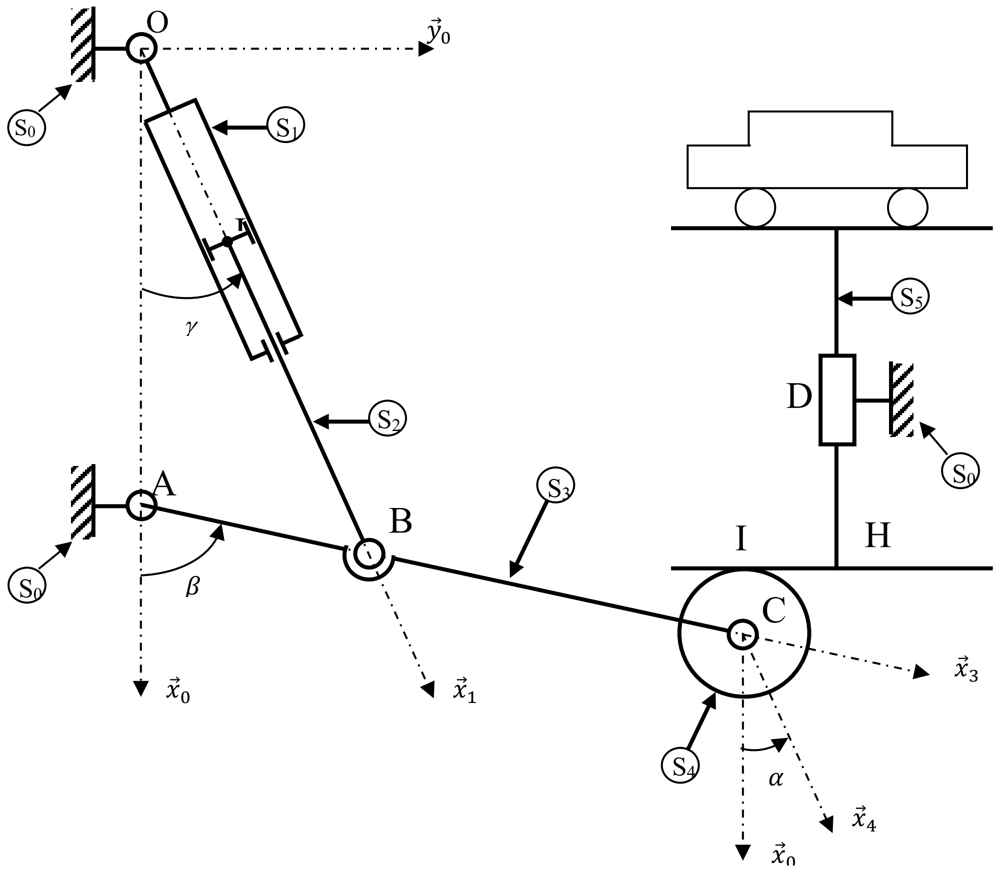
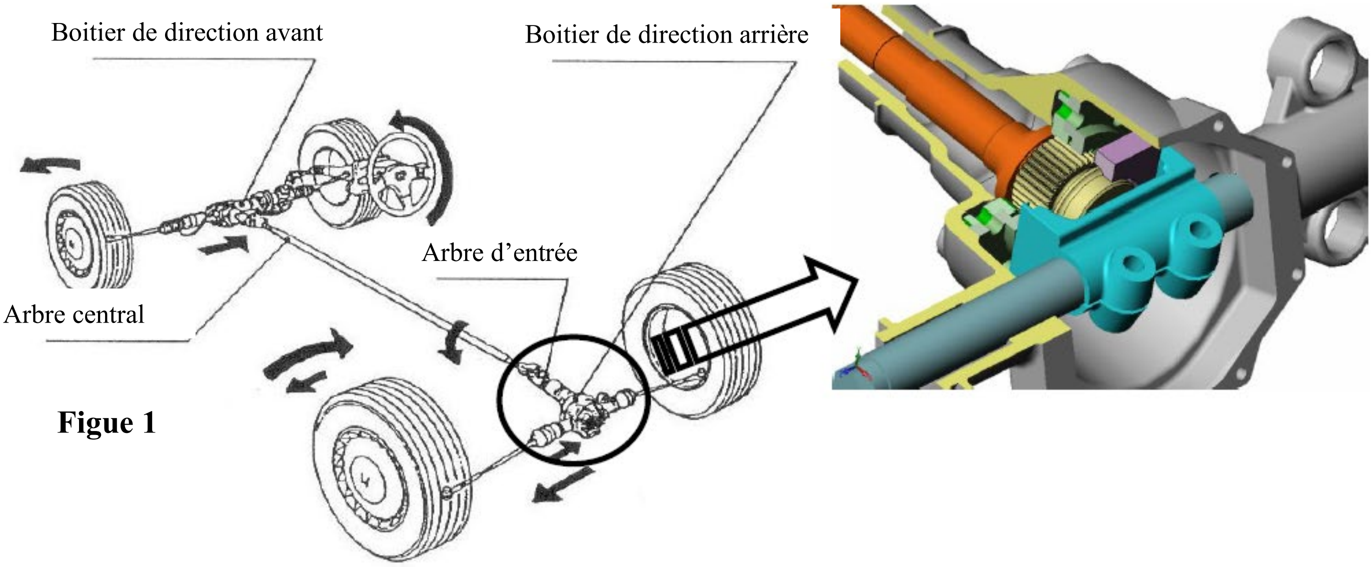


Figure 2

1) Déterminer : $\vec{\Omega}_{S1/S0}$, $\vec{\Omega}_{S2/S0}$, $\vec{\Omega}_{S3/S0}$, $\vec{\Omega}_{S2/S3}$, $\vec{\Omega}_{S4/S0}$, $\vec{\Omega}_{S4/S5}$,
2) Déterminer le vecteur vitesse du point J par rapport à S_3.
3) Déterminer, par composition des vitesses, le vecteur vitesse du point J par rapport à S_0.
4) Déterminer le vecteur accélération du point J par rapport à S_3.
5) Déterminer, par composition des accélérations, le vecteur accélération du point J par rapport à S_0.
6) Déterminer le vecteur vitesse du point C par rapport à S_0.
7) En écrivant la condition de roulement sans glissement an point I, déterminer dans la base R_0, la vitesse du poussoir S_5 par rapport à S_0 et déduire la relation entre $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$.
8) On s'intéresse au mouvement du galet S_4 par rapport au poussoir S_5 :
   a) Montrer que le mouvement de S_4 par rapport à S_5 est un mouvement plan sur plan.
   b) Déterminer le torseur cinématique au point I du mouvement de S_4 par rapport à S_5.
   c) Quelle est la nature de ce torseur ? déterminer son axe central.
   d) Déterminer le CIR du mouvement plan sur plan de S_4 par rapport à S_5.
   e) Déterminer la base et la roulante du mouvement plan sur plan de S_4 par rapport à S_5.

Exercice 3

Les figures ci-dessous décrivent la cinématique de direction d'un véhicule à quatre roues directrices. Par rapport à une direction classique (sur les deux roues avant uniquement), cette solution permet d'améliorer le rayon de braquage, la maniabilité ainsi que la stabilité dans les grandes courbes.



Figue 1

La figure 1 représente l'ensemble du système de direction ainsi que les sens de déplacements des différents composants.

Dans cette étude, nous allons nous intéresser au boîtier de direction arrière représenté en figure 2. La figure 3 donne le schéma cinématique correspondant.

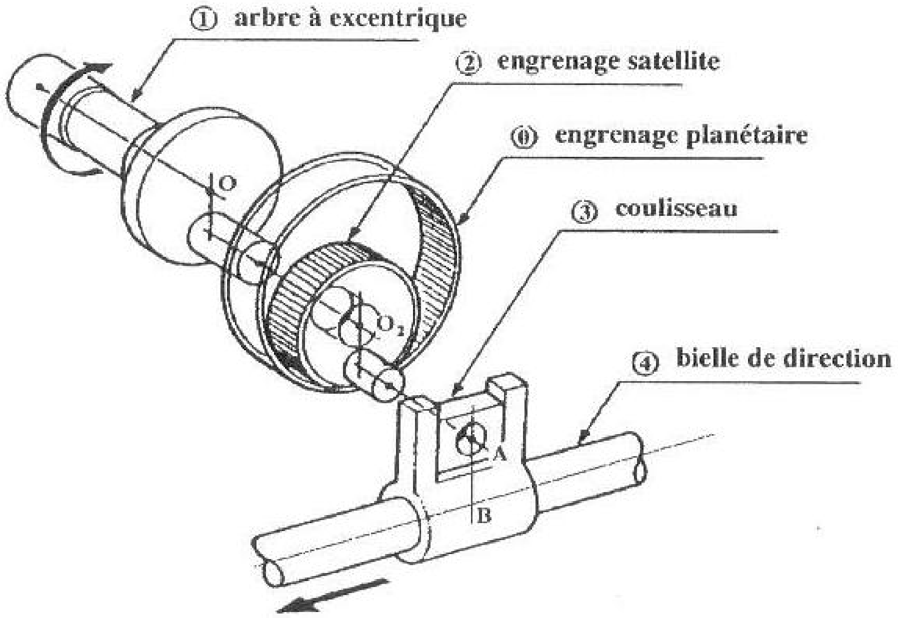


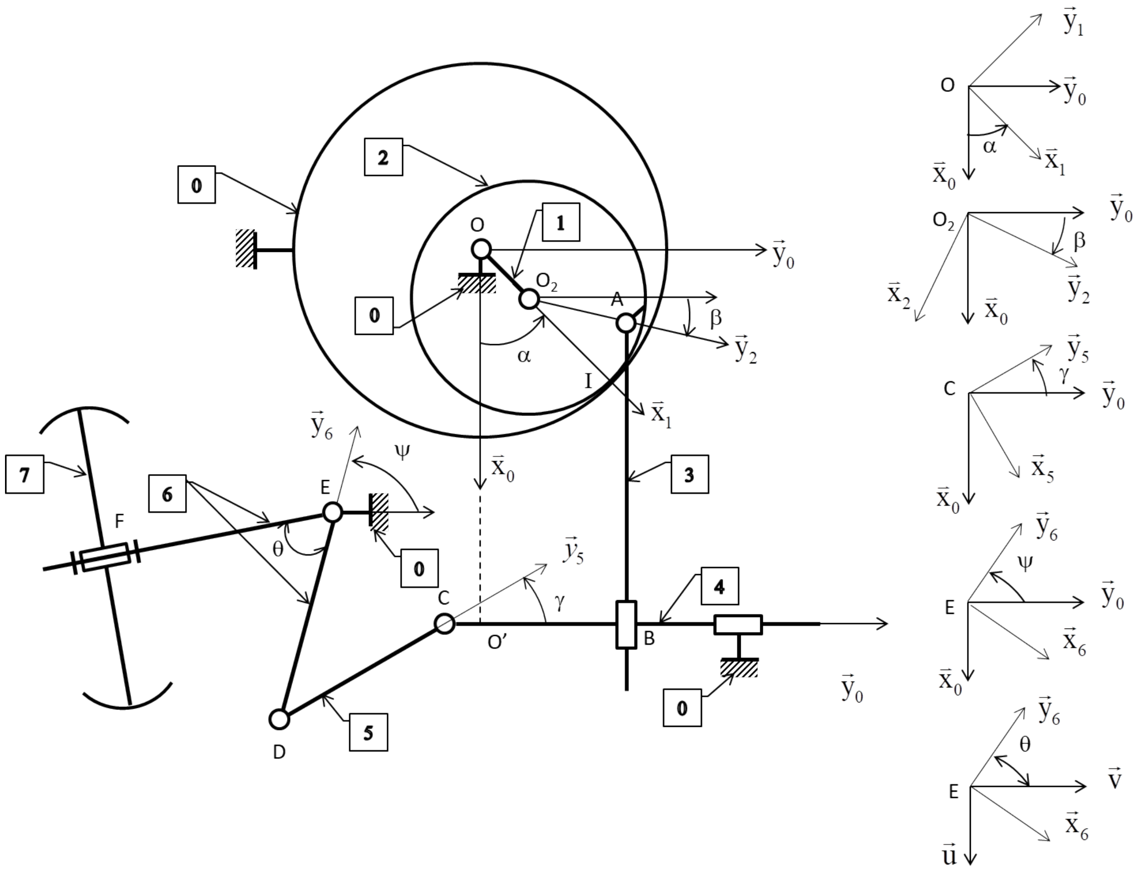
Figure 2

L'arbre central (Figure 1) transmet le mouvement entre le boîtier avant et l'arbre d'entrée à excentrique (**1**), d'excentricité **e**. L'arbre excentrique (**1**) est en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z}_0)$ par rapport au bâti (**0**).

L'engrenage satellite (**2**) de rayon primitif **(r)** est en liaison pivot d'axe $(O_2,\vec{z}_0)$ par rapport à (**1**).

<u>Il y a roulement sans glissement en I</u> entre (**2**) et l'engrenage planétaire (**0**) fixe au bâtie. L'engrenage (**0**) est centré en O et à un rayon primitif noté **(R)**.

Le coulisseau (**3**) est en liaison pivot d'axe $(A,\vec{z}_0)$ par rapport à (**2**) et en liaison glissière d'axe $(B,\vec{x}_0)$ par rapport à la biellette de direction (**4**).



N.B. : Le point O' est la projection de O sur l'axe $(B, \vec{y}_0)$ $(C, \vec{y}_0)$

Figure 3

La biellette de direction (**4**) est en liaison glissière d'axe $(C, \vec{y}_0)$ par rapport à (**0**). Cette même pièce (**4**) commande ensuite l'orientation de la roue (**7**) par l'intermédiaire des pièces (**5**) et (**6**).

Le mécanisme simplifié constitué des pièces (**4**), (**5**), (**6**) et (**7**) est représenté dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$. Les liaisons en C, D et E sont ainsi des liaisons pivots d'axes $(C, \vec{z}_0)$ $(D, \vec{z}_0)$ et $(E, \vec{z}_0)$ respectivement.

Soient les repères $R_0\ (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, $R_1\ (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$, $R_2\ (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$, $R_5\ (C, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_0)$ et $R_6\ (E, \vec{x}_6, \vec{y}_6, \vec{z}_0)$ respectivement liés aux solides (0), (1), (2)), (5) et (6). Le repère $R^*\ (E, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$est un autre repère lié à (6)

On donne : $\overrightarrow{OO_2} = e\,\vec{x}_1$, $\overrightarrow{O_2A} = d\,\vec{y}_2$, $\overrightarrow{OO'} = f\vec{x_0}$, $\overrightarrow{O'B} = \lambda(t)\,\vec{y}_0$, $\overrightarrow{DC} = a\,\vec{y}_5$, $\overrightarrow{DE} = b\,\vec{y}_6$, $\overrightarrow{FE} = c\,\vec{v}$,

$\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ $\beta = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$, $\gamma = (\vec{x}_0, \vec{x}_5)$, $\psi = (\vec{y}_0, \vec{y}_6)$. **Avec a , b, c ,d, e et f sont des constantes.**

<u>Objectif :</u> *Pour étudier le comportement du véhicule on a besoin de déterminer la vitesse du point F de la fusée de la roue (7) par rapport à (0). On cherche dans cette épreuve à déterminer ce vecteur par deux méthodes : analytique (questions 1 à 14) et graphique (question 15). Les deux parties sont indépendantes.*

1) Déterminer les vecteurs rotations instantanées :, $\vec{\Omega}_{1/0}$, $\vec{\Omega}_{2/0}$, $\vec{\Omega}_{3/0}$, $\vec{\Omega}_{5/0}$ et $\vec{\Omega}_{6/0}$.

2) Déterminer la vitesse du point (O_2) appartenant au solide (1) par apport à (0) : $\vec{V}(O_2 \in 1/0)$.

3) Quelle est la particularité de $\vec{V}(I \in 2/0)$ (Justifier)? Déterminer la relation qui relie $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$.

4) Que constitue le point I pour le mvt de 2/0? Déterminer, sans calcul, la base et la roulante du mouvement de (2) par rapport à (0).

5) Déterminer la vitesse du point (A) appartenant au solide (2) par rapport à (0): $\vec{V}(A \in 2/0)$. Déduire le vecteur vitesse $\vec{V}(B \in 3/0)$.

6) Déterminer en fonction de $\dot{\lambda}$ le vecteur vitesse $\vec{V}(B \in 4/0)$.

7) a) Déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide (4) par rapport à (3) au point B.

b) Ecrire la condition cinématique de la liaison glissière au point B. en

c) Déduire la relation qui exprime $\dot{\lambda}$ en fonction de $\dot{\alpha}$.

8) Déterminer $\vec{V}(D \in 5/0)$ en fonction de $\dot{\lambda}$ et $\dot{\gamma}$.

9) Ecrire le torseur cinématique du mouvement du solide (6) par rapport à (0) au point E. Quelle est la nature du mouvement entre les deux solides ? Déduire $\vec{V}(D \in 6/0)$.

10) Montrer que : $\dot{\psi} = \dfrac{\dot{\lambda}}{b(\sin\psi - \tan\gamma \cos\psi)}$

11) Déterminer en fonction $\dot{\psi}$ le vecteur vitesse $\vec{V}(F \in 7/0)$.

12) Déterminer $\|\vec{V}(F \in 7/0)\|$ pour une position à un instant donné.

$\dot{\alpha}$	α	β	γ	ψ	e	r	d	a	b	c
3,7 rad/s	45°	12°	30°	75°	15mm	25 mm	20 mm	40 mm	45 mm	50 m

13) On souhaite déterminer graphiquement la vitesse du point F de la fusée (7) par rapport à (0).

On donne la vitesse de translation de la biellette de direction (4) par rapport à (0) : $V_{c\in 4/0} = 30 \text{ mm/s}$.

N.B. ***La démarche graphique nécessite deux étapes.***

Compléter le tableau ci-dessous et faire les constructions graphiques nécessaires sur la figure suivante.

Echelle des vitesses : **1 mm → 1 mm/s** .

Etape	Grandeur	Direction	Méthode graphique	Norme déterminée graphiquement
1	....	....	....	....
2	$\vec{V}(F \in 7/0)$	....	....	$\|\vec{V}(F \in 7/0)\|$ =..................