# Chapitre 3 STATIQUE DES SOLIDES

**OBJECTIFS** (tels que formulés dans le programme officiel)
*à lire en fin de chapitre pour s'assurer qu'ils sont atteints !!!*

Au terme de ce chapitre l'étudiant devrait être capable de :

- Déterminer le torseur relatif à un pointeur (vecteur lié) ou un glisseur (vecteur glissant) et une somme de vecteurs caractérisant des charges concentrées. Maîtriser la notion du bras de levier ;
- Déterminer le torseur représentatif d'un couple et constater son indépendance vis-à-vis du point de réduction ;
- Déterminer la densité, en un point donné, d'un chargement réparti, savoir la représenter par un torseur, déterminer le torseur représentatif de l'ensemble du chargement réparti et interpréter géométriquement ce type de chargement sur des cas simples ;
- Déterminer le torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison élémentaire parfaite ou avec frottement de glissement ;
- Tracer le graphe d'analyse du mécanisme (graphe des liaisons avec les actions mécaniques extérieures exercées sur le mécanisme) ;
- Identifier le nombre de sous-systèmes indépendants à isoler ;
- Identifier le nombre d'équations algébriques à écrire (modélisation spatiale et plane) ;
- Isoler un à un chacun des sous-systèmes indépendants, identifier son extérieur, faire l'inventaire des actions mécaniques extérieures exercées sur chaque sous-système
- Ecrire (en leurs points d'application) les torseurs de toutes les actions mécaniques extérieures exercées sur le sous-système isolé, les transférer en un même point donné ;
- Déterminer, au point choisi, le torseur résultant de toutes les actions mécaniques extérieures exercées sur le sous-système isolé ;
- Appliquer le PFS à tous les sous-systèmes indépendants jusqu'à la détermination complète des composantes statiques inconnues au niveau des liaisons entre les différents solides du mécanisme ;
- Traiter des cas d'arc-boutement, de maintien de contact et du basculement comme applications ;
- Exploiter et interpréter les résultats obtenus.

## Contenu :

# 1. Modélisation des actions mécaniques

## 1.1. Définition d'une action mécanique

On appelle action mécanique toute cause susceptible de maintenir un corps au repos, de créer son mouvement ou de le déformer.

## 1.2. Classification des actions mécaniques

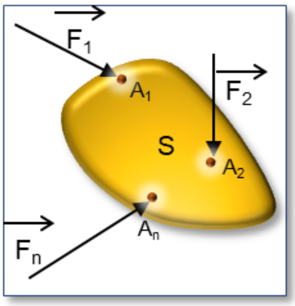
On peut classifier les actions mécaniques selon leur nature intrinsèque :

1. Actions mécaniques à distance (ex : ........................................................ )
2. Actions mécaniques de contact : (ex : ........................................................ ). Celles-ci se divisent en :
   2.1. Actions réparties surfaciques : ........................................................
   2.2. Actions réparties linéiques : ........................................................
   2.3. Actions ponctuelles : ........................................................

Finalement, les actions mécaniques peuvent également être catégorisées selon leur situation par rapport au système étudié :

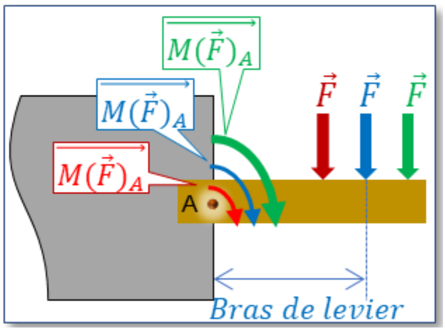
1. Actions mécaniques ..................................
2. Actions mécaniques ..................................

## 1.3. Premier principe de la statique




Soit un corps S qui subit de la part d'un ensemble matériel E une action mécanique représentée par un système de n forces $\left[(A_i, \vec{F}_i)\ i = 1; \ldots\ldots; n)\right]$. On caractérise de façon globale cette action mécanique à l'aide des deux vecteurs suivants:

$\vec{R}\,(E \to S) =$ .................................... $\overrightarrow{M_P}\,(E \to S) =$....................................




Le premier représente la résultante générale de l'action mécanique de E sur S alors que le deuxième représente le moment résultant au point P de la même action mécanique. En effet, en considérant l'exemple d'une poutre encastrée dans un mur et soumise à une force (figure ci-contre), la force à elle seule ne caractérise pas complétement l'action mécanique exercée sur un point A du mur. L'endroit où la force est appliquée influence également cette action mécanique. Il s'agit du *bras de levier* : *distance séparant le point A de l'axe de la force*. D'où la nécessité de définir la notion de moment.

De plus, on remarque en exprimant le moment résultant en un deuxième point N que le champ de moment est un champ antisymétrique de vecteur $\vec{R}$. En effet:

$\overrightarrow{M_N}\,(E \to S) =$ .......................................................................................................... d'où :

1[er] principe de la statique: Toute action mécanique d'un ensemble matériel E sur un solide S est entièrement caractérisée d'un point de vue mécanique par le torseur d'action mécanique: $\tau(E \to S)\begin{cases}\vec{R}\,(E \to S)\\ \overrightarrow{M_P}\,(E \to S)\end{cases}$

## 1.4. Modélisation des actions mécaniques à distance

Ces actions sont généralement exercées soit par le champ de pesanteur soit par un champs magnétique ou électromagnétique. Considérons par exemple le cas de l'action du champ de pesanteur terrestre Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à la terre tel que $(O, \vec{z})$ est la verticale ascendante. Le torseur d'action mécanique de la terre (pesanteur) sur un solide S est :

$$\tau(g \to S)\begin{cases}\vec{R}\,(g \to S) = \int_{P\in S} \vec{g}\ dm = -mg\,\vec{z}\\ \overrightarrow{M_A}\,(g \to S) = \int_{P\in S} \left(\overrightarrow{AP} \wedge \vec{g}\ dm\right) = -\int_{P\in S} \left(g\,\overrightarrow{AP}\ dm\right) \wedge \vec{z}\end{cases}$$

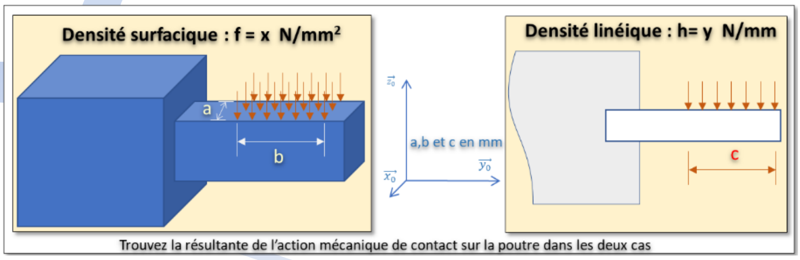
### 1.5. Modélisation des actions mécaniques de contact

Soient $S_1$ et $S_2$ deux solides en contact suivant une surface S. L'action mécanique de contact de $S_1$ sur $S_2$ est représentée par le torseur d'action mécanique de contact $\tau$, exprimé dans un point quelconque A comme suit :

$$\tau(S_1 \to S_2)\begin{Bmatrix} \vec{R}\,(S_1 \to S_2) = \int_{P\in S} \vec{f_P}\ (S_1 \to S_2)\ ds \\ \vec{M_A}\,(S_1 \to S_2) = \int_{P\in S} \vec{AP} \wedge \vec{f_P}\ (S_1 \to S_2) ds \end{Bmatrix}$$

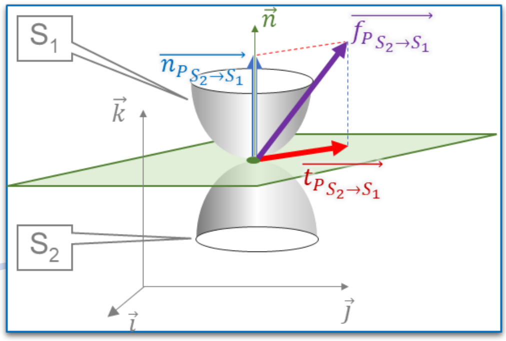
$\vec{f_P}$ ***étant la densité surfacique des forces de contact au point P***

La densité surfacique des forces de contact est homogène à des Newtons par unité de surface et souvent exprimée en Pa ou en MPa. La densité linéique est quant à elle homogène à des Newtons par unité de longueur.



Trouvez la résultante de l'action mécanique de contact sur la poutre dans les deux cas

### 1.6. Lois de Coulomb




Soient $S_1$ et $S_2$ deux solides en contact suivant une surface S. Soit $\pi$ le plan tangent commun à $S_1$ et $S_2$ en un point P de S et $\vec{f_P}\ (S_1 \to S_2)$ la densité surfacique des forces de contact de $S_2$ sur $S_1$ en P. Cette densité surfacique peut être décomposée en une composante normale à $\pi$ : $\vec{n_P}\ (S_2 \to S_1)$, appelée également pression, et en une autre composante tangentielle : $\vec{t_P}\ (S_2 \to S_1)$. On a :

$\vec{f_P}\ (S_2 \to S_1) =$ ..................................................................................................

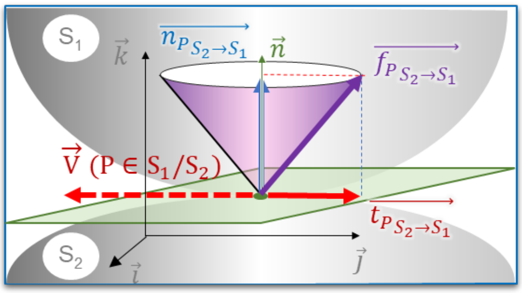
En utilisant cette décomposition, l'énoncé de la loi de Coulomb se fait comme suit, selon le genre de contact :

#### CAS 1: contact avec glissement

La densité surfacique tangentielle des forces de contact de $S_2$ sur $S_1$ au point P est opposée à la vitesse de glissement de $S_1$ par rapport à $S_2$:

$\vec{t_P}\ (S_2 \to S_1)$ .......... $\vec{V}\ (P \in S_1/S_2)$........................ et $\vec{t_P}\ (S_2 \to S_1)$ .......... $\vec{V}\ (P \in S_1/S_2)$........................

De plus, la norme de la densité surfacique tangentielle est proportionnelle à celle de la densité surfacique normale. Le coefficient de proportionnalité est le coefficient de frottement $f$ :




$\left\|\vec{t_P}\ (S_2 \to S_1)\right\| = f\left\|\vec{n_P}\,(S_2 \to S_1)\right\|$ d'où $f = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} = tg\phi$

La densité des forces de contact se trouve donc sur le bord du cône de frottement de sommet P, d'axe perpendiculaire à $\pi$ et de demi angle au sommet $\varphi$ (dit angle de frottement).

#### CAS 2: contact sans glissement

La densité surfacique des forces de contact de $S_1$ sur $S_2$ au point P se trouve à l'intérieur (limite ........................) du cône de frottement : $\left\|\vec{t_p}\ (S_2 \to S_1)\right\|$.................. $f\left\|\vec{n_p}\ (S_2 \to S_1)\right\|$

COMPLEMENT : VALEURS TYPIQUES DU COEFFICIENT DE FROTTEMENT.( A TITRE INDICATIF)

| **INTERFACE (CONTACT A SEC, RUGOSITES SIMILAIRES)** | **f** | **φ** |
|---|---|---|
| Métal sur métal | 0,1 | 6 ° |
| Métal sur bois | 0,3 | 17 ° |
| Bois sur bois | 0,4 | 22 ° |
| Pneus sur chaussée | 0,6 | 31 ° |
| Acier sur glace | 0,015 | 1 ° |

*De plus, si* ***f=0*** *on est en présence d'un* ***contact sans frottement*** *et par conséquent :*

$$\vec{f_p}\ (S_1 \to S_2) = \vec{n_p}\ (S_1 \to S_2)$$
$$\vec{f_p}\ (S_1 \to S_2) \perp \pi$$

### 1.7. Solides en contact ponctuel

À partir de cette section nous n'allons traiter que le cas du contact ponctuel, où la surface de contact S entre les solides $S_1$ et $S_2$ est considérée infinitésimale. Dans ce cas, le torseur de l'action mécanique de $S_1$ sur $S_2$ est le suivant:

$$\tau(S_1 \to S_2)\begin{cases}\vec{R}\,(S_2 \to S_1) = \vec{N}\,(S_2 \to S_1) + \vec{T}\,(S_2 \to S_1) \\ \overrightarrow{M_P}\,(S_2 \to S_1)\end{cases}$$

composante tangentielle de la résultante générale dite aussi **"Effort tangentiel"**

composante normale de la résultante générale dite aussi **"Effort normal"**

Conditions sur la vitesse de glissement

Cas 1 $\vec{V}\,(P \in S_1/S_2) \neq \vec{0}$ : $\left\|\vec{T}\;(S_2 \to S_1)\right\| = f\left\|\vec{N}\;(S_2 \to S_1)\right\|$ avec $f$ : coef. de frottement

Cas 2 $\vec{V}\,(P \in S_1/S_2) = \vec{0}$ : $\left\|\vec{T}\;(S_2 \to S_1)\right\|$ ............ $\left\|\vec{N}\;(S_2 \to S_1)\right\|$ (contact avec adhérence).

### 1.8. Liaisons normalisées – torseur des actions mécaniques transmissibles

Soient deux solides $S_1$ et $S_2$ en liaison mécanique parfaite (sans frottement). Considérons les éléments de réduction du torseur d'action mécanique de $S_2$ sur $S_1$ au point O: $\tau(S_2 \to S_1)\begin{cases}\vec{R}\,(S_2 \to S_1) \\ \overrightarrow{M_O}\,(S_2 \to S_1)\end{cases}$

Dans un repère R($O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) placé sur la liaison (supposée sans frottement), on exprime:

$\vec{R}\,(S_1 \to S_2) = X\,\vec{x} + Y\,\vec{y} + Z\,\vec{z}$

$\overrightarrow{M_O}\,(S_1 \to S_2) = L\,\vec{x} + M\,\vec{y} + N\,\vec{z}$ ainsi on a: $\tau(S_1 \to S_2)\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O$

Le tableau ci-dessous renferme la forme canonique du torseur d'action mécanique de $S_2$ sur $S_1$ au point O pour les principales liaisons normalisées. Pour certaines liaisons, la forme du torseur s'applique à un ensemble de points et non uniquement au centre de la liaison O.

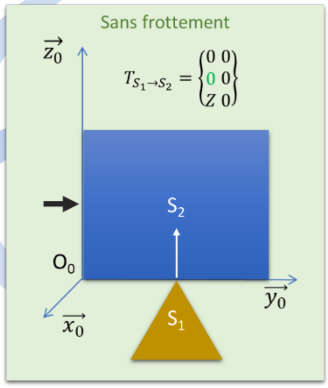
| | | | |
|---|---|---|---|
| Liaison ponctuelle de normale $(\boldsymbol{O}, \vec{z})$ | $\tau_{(S_1 \to S_2)}\begin{Bmatrix} & \\ & \end{Bmatrix}_O$ | Liaison pivot glissant d'axe $(\boldsymbol{O}, \vec{x})$ | $\tau_{(S_1 \to S_2)}\begin{Bmatrix} & \\ & \end{Bmatrix}_O$ |
| Liaison pivot d'axe$(\boldsymbol{O}, \vec{z})$ | $\tau_{(S_1 \to S_2)}\begin{Bmatrix} & \\ & \end{Bmatrix}_O$ | Liaison glissière d'axe $(\boldsymbol{O}, \vec{x})$: | $\tau_{(S_1 \to S_2)}\begin{Bmatrix} & \\ & \end{Bmatrix}_O$ |
| Liaison appui plan de normale $(\boldsymbol{O}, \vec{z})$: | $\tau_{(S_1 \to S_2)}\begin{Bmatrix} & \\ & \end{Bmatrix}_O$ | Liaison encastrement | $\tau_{(S_1 \to S_2)}\begin{Bmatrix} & \\ & \end{Bmatrix}_O$ |

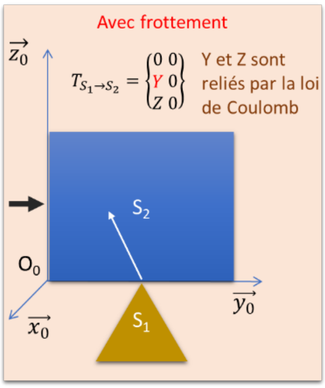
**Note 1**: Se référer au chapitre III pour les représentations graphiques des liaisons mécaniques citées ci-dessous.

**Note 2**: Si on compare le torseur des actions mécaniques d'une liaison sans frottement avec son torseur cinématique on constate la complémentarité pouvant être exprimée par la nullité du ................................ des deux torseurs: ..........................................................................................................................................

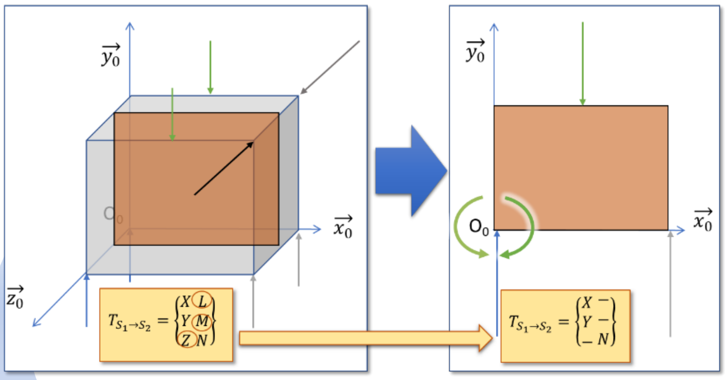
En termes simples, si un mouvement est permis par la liaison, alors l'AM correspondante est nulle. Par contre, si un mouvement est bloqué par la liaison, alors l'AM correspondante est non nulle

**Note 3** : Si les liaisons ne sont pas parfaites (avec frottement), les torseurs d'action mécanique s'écriraient différemment. En fait, certaines composantes .......................... des résultantes qui étaient .................. ne le seraient plus. La figure ci-dessous illustre cela pour l'exemple de la liaison .................................................. .



**Note 4 :** Si la géométrie des liaisons d'un système matériel présente un plan de symétrie et que les A.M. extérieures exercées sur ce système sont symétriques par rapport à ce plan, alors on peut admettre que le mécanisme est « plan », c'est à dire que :




- les résultantes des A.M. extérieures sont contenues dans le plan de symétrie
- les moments des A.M. extérieures sont perpendiculaires au plan de symétrie

## 2. Principe fondamental de la statique

### 2.1. Équilibre d'un ensemble matériel

Soit un ensemble matériel quelconque E pouvant être un solide, un mécanisme, une masse fluide, …etc. On dit que l'ensemble matériel E est en équilibre par rapport à un repère R si, au cours du temps, chaque point matériel de E

…………………………………………………………………………… .

### 2.2. Principe fondamental de la statique (PFS)

#### Enoncé du PFS

*Si un ensemble matériel E en équilibre par rapport à un repère R ; alors pour tout sous-ensemble e de E … le torseur des actions mécaniques extérieures est nul.*

E en équilibre / R $\Rightarrow$ $\forall$ e $\in$E ; $\forall$ P $\in$ e ; $\tau_{\bar{e}\to e} = \left\{\vec{0}\ ,\ \vec{0}\right\}_P$

#### Théorème de la résultante statique (découle directement du PFS)

*Si un ensemble matériel E en équilibre par rapport à un repère R ; alors pour tout sous-ensemble e de E … la résultante des actions mécaniques extérieures est nulle.*

E en équilibre / R $\Rightarrow$ $\forall$ e $\in$E ; $\forall$ P $\in$ e ; $\vec{R}_{\bar{e}\to e} = \vec{0}$

#### Théorème du moment statique (conséquence logique du PFS)

*Si un ensemble matériel E en équilibre par rapport à un repère R ; alors pour tout sous-ensemble e de E … le moment résultant des actions mécaniques extérieures est nul.*

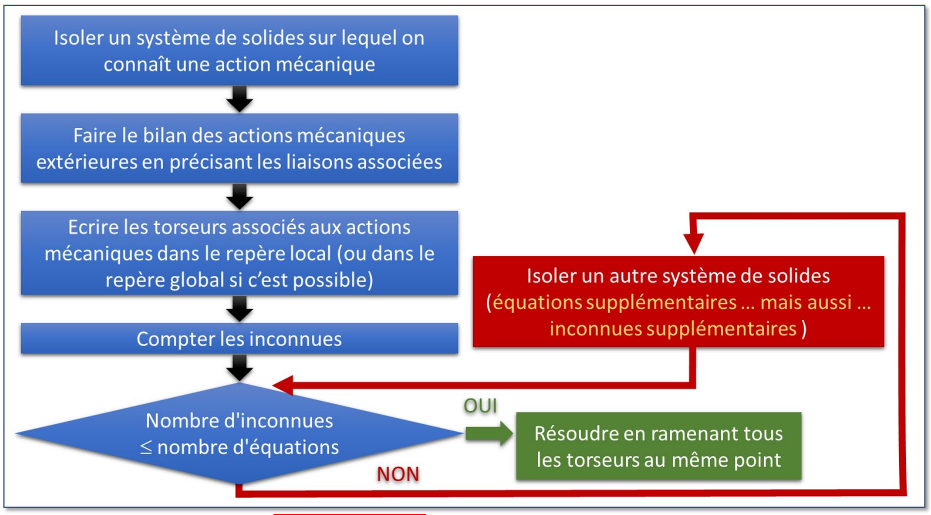
E en équilibre par rapport à un repère R $\Rightarrow$ $\forall$ e $\in$ E ; $\forall$ P $\in$ e ; $\overrightarrow{M(P)}_{\bar{e}\to e} = \vec{0}$

#### Théorème des actions mutuelles (principe de l'action-réaction)

*Pour tout sous-ensembles $e_1$ et $e_2$ d'un ensemble matériel E en équilibre par rapport au repère R, le torseur des actions mécaniques de $e_1$ sur $e_2$ est opposé au torseur des actions mécaniques de $e_2$ sur $e_1$.*

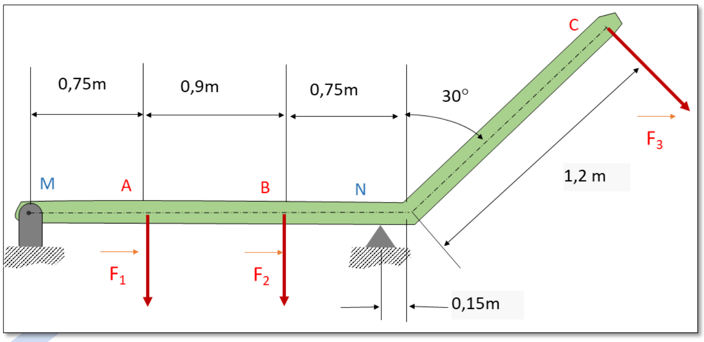
E en équilibre par rapport à un repère R $\Rightarrow$ $\forall$ $e_1$ ; $e_2$ *sous ensembles de* E ; $\tau_{e_1\to e_2} = -\tau_{e_2\to e_1}$

## 2.3. Méthodologie de résolution de problèmes en statique




## 2.4. Application .... résolution détaillée disponible sur YouTube

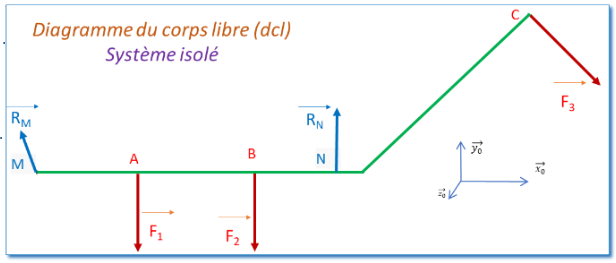
Soit une poutre P, articulée au point M et appuyée au point N. P supporte une première charge $\vec{F_1}$ de norme 800N, une deuxième $\vec{F_2}$ de norme 1200N et une troisième $\vec{F_3}$ de norme 700N. Si on néglige le poids de la poutre ainsi que tout frottement, on demande de déterminer les actions de contact en M et en N.




*Système isolé* : ………… *PFS* : …………

*avec* …………

*Torseurs des AM ext.* : …………




…………

…………

…………

*Nbre inconnues scalaires* : ………… *Nbre équations scalaires* : ………… *Conclusion* : …………

*Choix du point de transfert des moments* : …………

*Torseurs des AM ext. transférés* : …………

…………

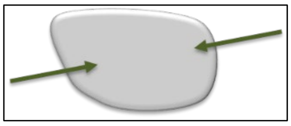
…………

*Équations scalaires* : …………

…………

### 2.5. Résolution graphique

#### Système S soumis à 2 forces (2 glisseurs)

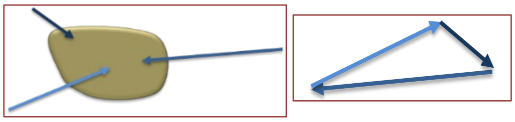


→ Les 2 forces sont **opposées** (même norme, même direction, sens contraire)

→ Les 2 forces ont **même droite d'action** pour annuler le moment résultant.

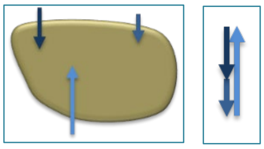
| |
|---|
| ⇨ Les 2 forces sont opposées et ont la même droite d'action |

#### Système S soumis à 3 forces (3 glisseurs)



→ soit non // donc coplanaires

→ et concourantes en un même point pour annuler le moment



→ Soit // donc pas nécessairement coplanaires

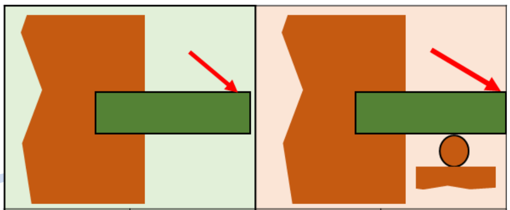
→ et coplanaires pour annuler le moment résultant

| |
|---|
| ⇨ Les 3 forces coplanaires de somme vectorielle nulle et soit // 2 à 2 ou concourantes |

## 3. Notions complémentaires

### 3.1. Système isostatique vs. Système hyperstatique

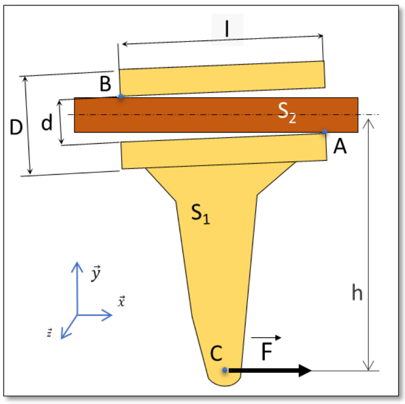
Si dans l'étude de l'équilibre d'un système mécanique, le nombre d'inconnues correspond au nombre d'équations pouvant être utilisées, le système est dit isostatique. Le cas échéant il est dit hyperstatique.



| | | Pb spatial | Pb plan | Pb spatial | Pb plan |
|---|---|---|---|---|---|
| Inconnues (scalaires) | Encastrement | 6 | 3 | 6 | 3 |
| | Appui ponctuel | | | 1 | 1 |
| | TOTAL | 6 | 3 | 7 | 4 |
| Équations (scalaires) | Equil. forces | 3 | 2 | 3 | 2 |
| | Equil. moments | 3 | 1 | 3 | 1 |
| | TOTAL | 3 + 3 = 6 = 6 | 2 + 1 = 3 = 3 | 3 + 3 = 6 < 7 | 2 + 1 = 3 < 4 |
| | | Système isostatique | | Système hyperstatique | |

### 3.2. Arc-boutement

Quand deux solides $S_1$ et $S_2$ sont susceptibles de glisser l'un sur l'autre et que ce mouvement est rendu impossible, on dit qu'il y a un phénomène d'arc-boutement.



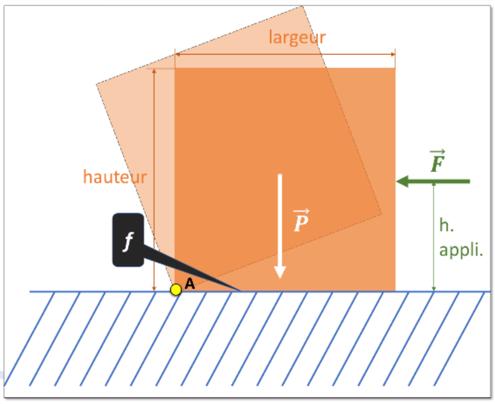

**Application** .... Résolution détaillée disponible sur YouTube

Dans l'exemple typique de la figure ci- contre, nous allons examiner la condition d'arc-boutement et déterminer quels sont les paramètres qui la favorisent. On aimerait prouver que l'arc-boutement (blocage) est :

- *favorisé par un h + grand*
- *favorisé par un l + petit*
- *favorisé par un f (coef de frottement) + grand*
- *Ne dépend pas de F*

### 3.3. Basculement

Si les deux solides $S_1$ et $S_2$ en contact plan sont susceptibles de glisser l'un sur l'autre et qu'à cause du frottement, la liaison se transforme en contact ponctuel, on parle ici d'un phénomène de basculement




**Application** .... A faire en guise de travail à la maison

Pour l'exemple typique de la figure ci- contre, trouver la force minimale susceptible de créer le glissement vers la gauche et sa hauteur maximale d'application pour éviter le basculement autour de A.