

Chapitre 1

MODELISATION ET PARAMETRAGE DES SYSTEMES MECANIKES

OBJECTIFS *à lire en fin de chapitre pour s'assurer qu'ils sont atteints !!!*

Au terme de ce chapitre l'étudiant devrait être capable de :

- Identifier le paramétrage d'une liaison élémentaire ;
- Lire un schéma cinématique afin de comprendre le principe de fonctionnement ;
- Etablir le graphe des liaisons à partir d'un schéma cinématique ;
- Etablir les relations scalaires indépendantes qui découlent de la condition géométrique de la fermeture des chaînes cinématiques ;
- Déterminer la loi "Entrée-Sortie".

CONTENU :

1. Définitions et postulats	1
2. Paramétrage de la position d'un solide par rapport à un repère	2
3. Liaisons élémentaires.....	3
4. Paramètres d'un système.....	4
5. Lecture d'un schéma cinématique.....	4
6. Loi d'entrée sortie.....	6

1. Définitions et postulats

Intérêt et définition de la cinématique : La cinématique est l'étude des Indépendamment des causes qui les produisent. Comparativement à la géométrie qui repose uniquement sur la notion de l'espace, la cinématique introduit un autre concept : Ce paramètre sert à repérer une position particulière d'un corps parmi toutes celles qu'il a occupées. Ainsi, en cinématique, on étudie les relations : -

Points matériels : Tout système mécanique peut être représenté dans l'espace par un ensemble de points. Ces points sont appelés points matériels. *Un point matériel n'est pas nécessairement une particule de matière !!! (ex. : centre d'une roue ... c'est un point matériel de la roue bien qu'il n'y ait pas de matière !!!)*

Point géométrique : C'est un point qui joue un rôle important (ex. : contact) bien que n'appartenant à aucun solide

Système mécanique : On appelle système mécanique toute partie de l'univers que l'on choisit par la pensée dans le but de l'étudier et ce, en prenant soin de bien l'isoler. Un système isolé est un système dont la frontière séparant son intérieur de son extérieur est bien définie.

Référentiel de mouvement : Un référentiel de mouvement est constitué par l'ensemble "repère de l'espace physique" et "repère de temps".

Solide rigide : On appelle solide rigide un système mécanique Σ tel que la distance entre deux points quelconques lui appartenant reste invariante au cours du temps, i.e. : $\forall M \in \Sigma, \forall N \in \Sigma \dots \dots \dots \forall t$

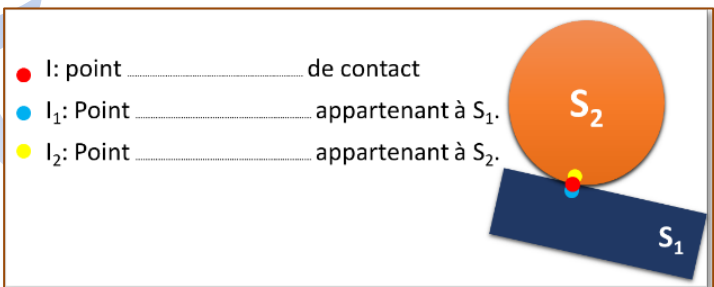
Mouvement : Le solide S_1 est en mouvement par rapport au solide S_2 si les distances de 3 points quelconques de S_1 à 3 points quelconques de S_2 varient au cours du temps. Sinon, on dira que S_1 est au repos par rapport à S_2 .

Repère lié : On définit un repère R_0 comme étant un repère lié au solide S_0 si tous les points matériels de S_0 sont fixes dans R_0 . Aussi, si R_0 et R_1 sont deux repères liés respectivement aux solide S_0 et S_1 , étudier le mouvement relatif de S_1 par rapport à S_0 revient à étudier celui de R_1 par rapport à R_0 .

Relativité du mouvement : On ne qualifierait **JAMAIS** un solide de **FIXE** ou de **MOBILE** que par rapport à un repère bien déterminé !!!

Solide libre / solide lié : Un solide est dit libre si aucune restriction n'est apportée à ses possibilités de mouvement. Le cas échéant, on dira qu'il est soumis à des liaisons. Les liaisons élémentaires sont définies à la section 3.

Point coïncidant : Soit P un point mobile par rapport à R_0 et t_0 un instant donné. Soit P_0 le point de R_0 (fixe dans R_0) tel que : $\vec{OP}_0 = \vec{OP}(t_0)$. Le point P_0 est appelé point coïncidant de P à $t = t_0$.



2. Paramétrage de la position d'un solide par rapport à un repère

Étudier le mouvement du solide rigide S' par rapport à un autre solide rigide S, nécessite tout d'abord l'expression exacte de la position de S'/S. Ensuite, il serait possible d'étudier l'évolution de cette position relative en fonction du

Soient deux repères de l'espace $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ liées respectivement aux solides S et S'. Repérer S' par rapport S revient à repérer R' par rapport R. Pour ce faire, il faudrait accomplir les 2 tâches suivantes:

2.1. Repérer un point de R'/R

Choisissons l'origine O' de R' comme le point à repérer dans R. Trois paramètres sont nécessaires pour repérer O'.
 $\vec{OO}' = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$ **Note :** Tout point matériel possède degrés de liberté.

2.2. Repérer l'orientation de R'/R

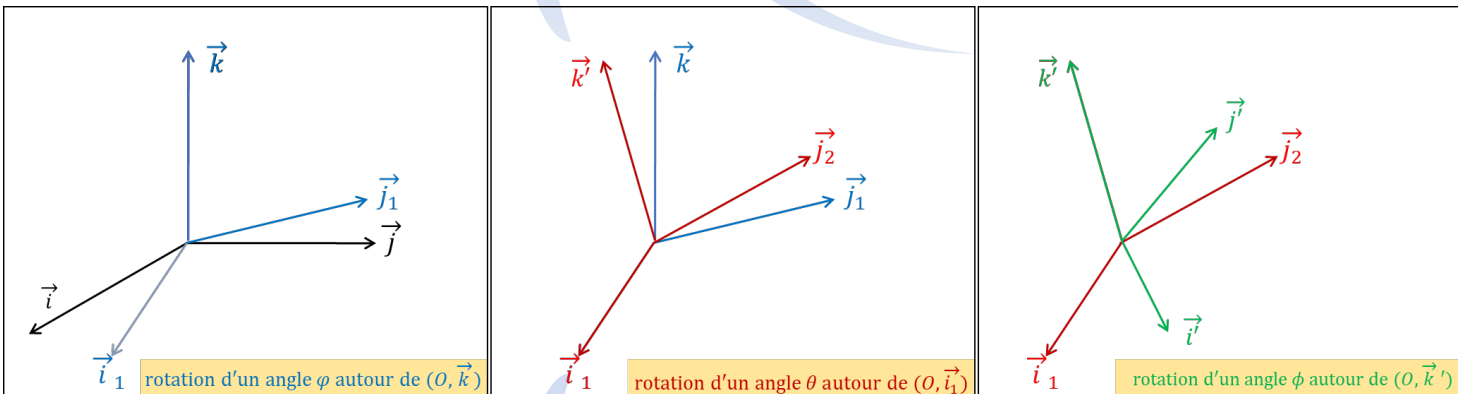
Méthode 1 [Utilisation des cosinus directeurs] : Les vecteurs de base de R' sont exprimés dans R à l'aide de neuf paramètres (trois cosinus directeurs pour chacun) entre lesquels existent six relations trois de normalité et trois d'orthogonalité):

$$\begin{cases} \vec{i}' = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k} \\ \vec{j}' = d \vec{i} + e \vec{j} + f \vec{k} \\ \vec{k}' = g \vec{i} + h \vec{j} + l \vec{k} \end{cases} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

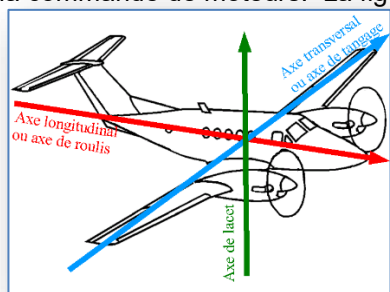
Ceci réduit le nombre des paramètres nécessaires au repérage de l'orientation de R' / R à paramètres indépendants et le nombre de paramètres nécessaire au repérage complet de R' à paramètres (..... = +).

Méthode 2 [Utilisation des angles d'Euler] : Cette méthode permet de définir les trois paramètres nécessaires à l'orientation de R' / R comme étant les angles de trois rotations successives permettant de passer de R à R' (en passant par deux repères intermédiaires R₁ et R₂):

$$\begin{aligned} R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) &\xrightarrow{\text{rotation d'un angle } \varphi \text{ autour de } (O, \vec{k})} R_1(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}) \\ R_1(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}) &\xrightarrow{\text{rotation d'un angle } \theta \text{ autour de } (O, \vec{i}_1)} R_2(O, \vec{i}_1, \vec{j}_2, \vec{k}') \\ R_2(O, \vec{i}_1, \vec{j}_2, \vec{k}') &\xrightarrow{\text{rotation d'un angle } \phi \text{ autour de } (O, \vec{k}')} R'(O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}') \end{aligned}$$



• **Méthode 3 [Utilisation des angles de Cardan] :** Cette méthode, utilisée surtout en robotique ou pour la navigation (maritime / aéronautique) met en œuvre des paramètres directement utilisables en pratique pour la commande de moteurs. La figure ci-dessous illustre ce principe pour le pilotage d'un avion :



- Paramètre 1 (angle de lacet) :** mesuré autour de \vec{z}_0
Rotation donnant le repère intermédiaire $(\vec{x}_1; \vec{y}_1; \vec{z}_0)$
- Paramètre 2 (angle de tangage) :** mesuré autour de \vec{y}_1
Rotation donnant le repère intermédiaire $(\vec{x}'; \vec{y}_1; \vec{z}_2)$
- Paramètre 3 (angle de roulis) :** mesuré autour de \vec{x}'
Rotation donnant le repère final $(\vec{x}'; \vec{y}'; \vec{z}')$

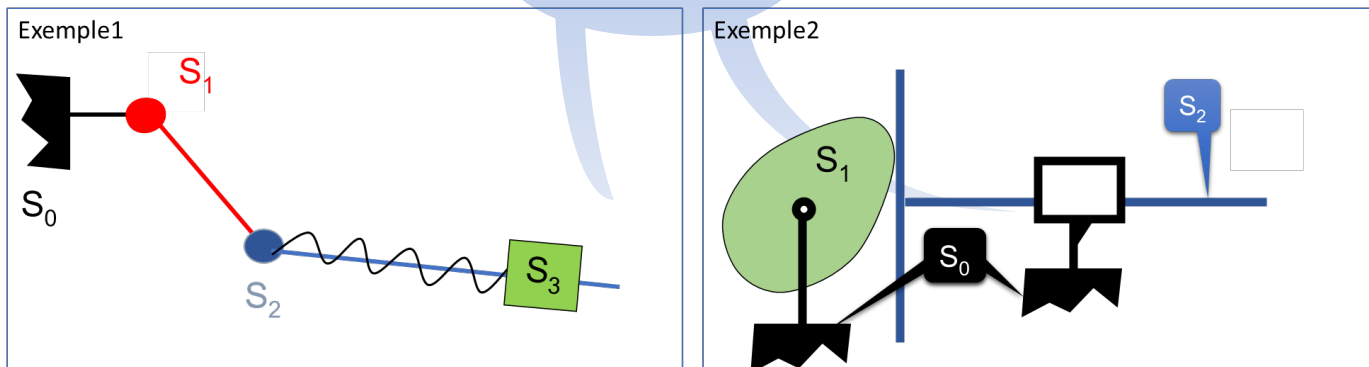
3. Liaisons élémentaires

LIAISONS ELEMENTAIRES	exemple	Exemples	Représentation plane	Représentation en perspective	Degré de mobilité	Degré de liaison	Tableau des mobilités								
Liaison encastrement					0	6	<table border="1"> <tr><td>T</td><td>R</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	T	R	0	0	0	0	0	0
T	R														
0	0														
0	0														
0	0														
Liaison glissière					1	5	<table border="1"> <tr><td>T</td><td>R</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	T	R	1	0	0	0	0	0
T	R														
1	0														
0	0														
0	0														
Liaison pivot					1	5	<table border="1"> <tr><td>T</td><td>R</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	T	R	0	1	0	0	0	0
T	R														
0	1														
0	0														
0	0														
Liaison pivot glissant					2	4	<table border="1"> <tr><td>T</td><td>R</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	T	R	1	1	0	0	0	0
T	R														
1	1														
0	0														
0	0														
Liaison glissière hélicoïdale					2 conjuguées	4	<table border="1"> <tr><td>T</td><td>R</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	T	R	1	1	0	0	0	0
T	R														
1	1														
0	0														
0	0														
Liaison plane					3	3	<table border="1"> <tr><td>T</td><td>R</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	T	R	1	0	1	0	0	1
T	R														
1	0														
1	0														
0	1														
Liaison rotule					3	3	<table border="1"> <tr><td>T</td><td>R</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	T	R	0	1	0	1	0	1
T	R														
0	1														
0	1														
0	1														
Liaison linéaire annulaire					4	2	<table border="1"> <tr><td>T</td><td>R</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	T	R	1	1	0	1	0	1
T	R														
1	1														
0	1														
0	1														
Liaison ponctuelle					5	1	<table border="1"> <tr><td>T</td><td>R</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	T	R	1	1	1	1	0	1
T	R														
1	1														
1	1														
0	1														
Liaison linéaire rectiligne					4	2	<table border="1"> <tr><td>T</td><td>R</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	T	R	1	1	1	0	0	1
T	R														
1	1														
1	0														
0	1														

4. Paramètres d'un système

On appelle paramètres d'un système mécanique l'ensemble des n variables qui permettent d'obtenir les coordonnées de tout point du système par rapport au repère R_0 et ce, à tout instant t .

Dans le premier exemple ci-dessous (à gauche), les paramètres du système $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ sont d, θ et ϕ . Quant au deuxième exemple (à droite), les paramètres sont x et θ .



Note 1: Si les paramètres peuvent avoir des valeurs arbitraires (tout en respectant les hypothèses de fonctionnement du mécanisme), ils sont dits indépendants (cas de l'exemple 1). Le cas échéant ils sont dits dépendants (cas de l'exemple 2).

Note 2: Le nombre et le choix des paramètres n'est pas toujours unique. Il dépend surtout du but à atteindre par l'étude du système.

5. Lecture d'un schéma cinématique

5.1. Classe d'équivalence

On appelle classe d'équivalence, un ensemble de solides d'un mécanisme, solidaires les uns des autres pendant la phase de fonctionnement considérée. On dit aussi qu'elles sont liées par une liaison ou aussi qu'elles sont sans aucun

5.2. Schéma cinématique

Afin de comprendre le fonctionnement d'un système mécanique, la lecture du dessin d'ensemble peut s'avérer complexe. Il serait ainsi utile d'en simplifier la représentation. Par ailleurs, lorsque le système est encore en phase de conception, on pourrait avoir besoin d'un schéma illustrant le fonctionnement attendu sans toutefois limiter le concepteur dans les formes et dimensions à concevoir. Il s'agit du schéma cinématique.

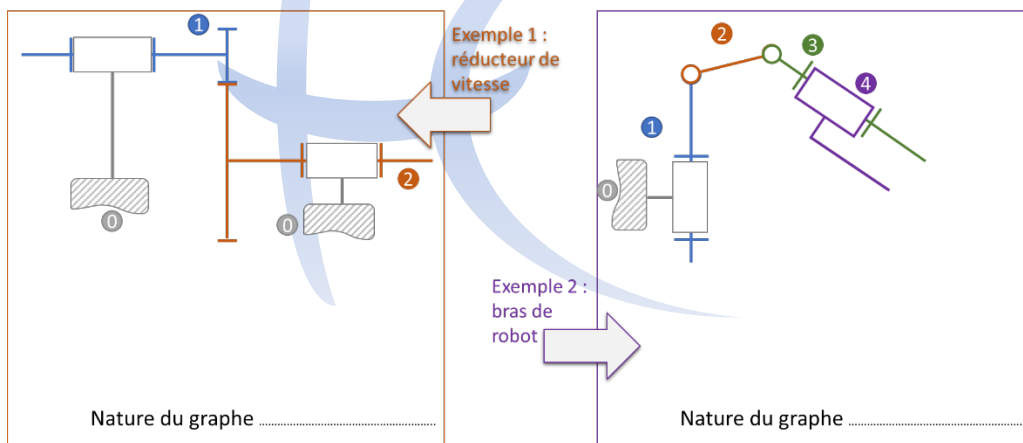
Ce schéma est dit *minimal* quand il représente un mécanisme avec au plus une liaison mécanique entre deux solides ou classe d'équivalence.

5.3. Graphe de liaisons

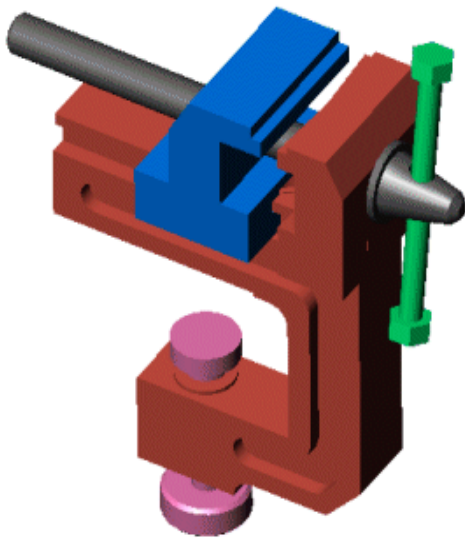
Il s'agit d'un outil mathématique constitué de nœuds représentant les classes d'équivalence et d'arcs représentant les liaisons mécaniques. On parle d'un graphe de liaison s'il ne comporte aucune boucle. Il est dit s'il en comporte exactement une et s'il en comporte plus.

Application :

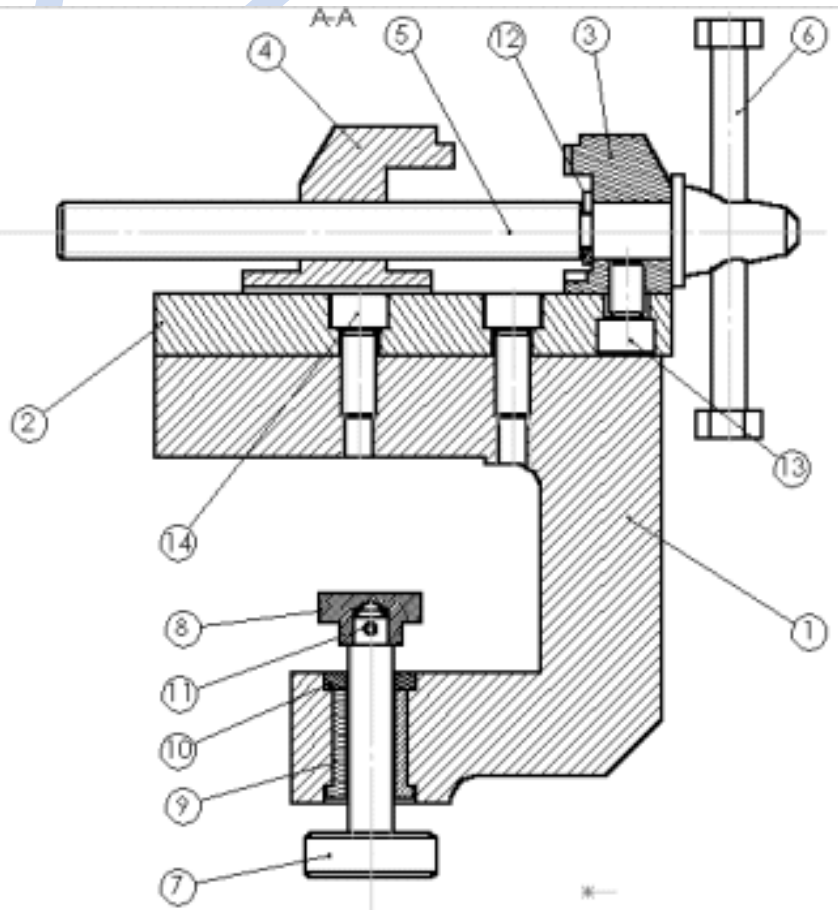
Complétez les graphes ci-dessous et identifiez leurs types.



Exemple : Etau



Perspective (modèle solide)



Dessin d'ensemble

$A = \{ 1, 2, 3, 9, 10, 13, 14 \}$

$B = \{ 4 \}$

$C = \{ 5, 12 \}$

$D = \{ 6 \}$

$E = \{ 7, 8, 11 \}$

Classes d'équivalence

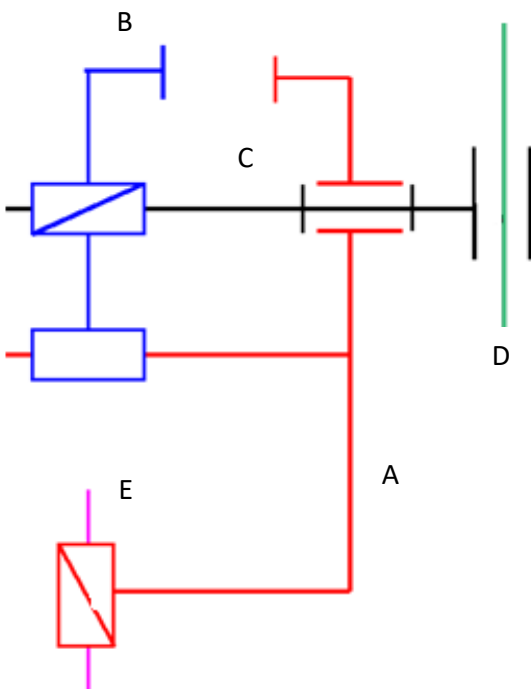
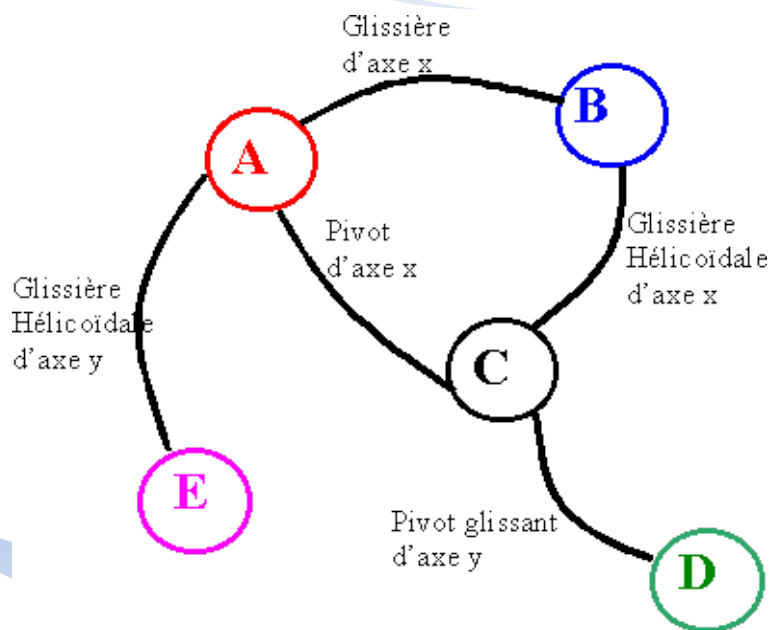


Schéma cinématique



Graphe de liaison

6. Loi d'entrée sortie

6.1. Définition de base (pour chaîne fermée)

Un système se présentant sous forme d'une chaîne de solide fermée a pour but de transformer un mouvement. On s'intéresse alors pour cela à la relation cinématique liant :

- le mouvement de sortie (*output, conséquences, résultats, mouvement attendus, ...*) au
- mouvement d'entrée (*input, action de l'opérateur ou de l'actionneur, ...*) du système et

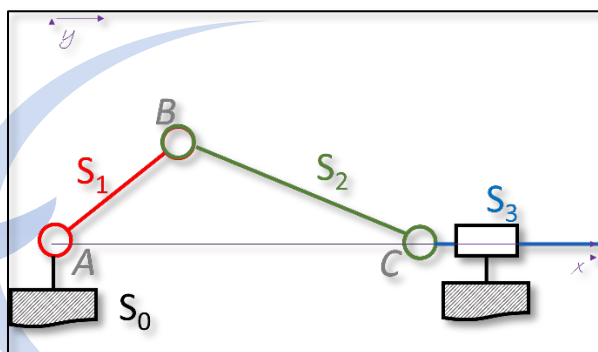
Pour établir cette loi, on suit la procédure suivante basée sur la fermeture de la chaîne géométrique (étape 3) :

1. Paramétrer le mécanisme (*donné à l'étudiant*) ;
2. Identifier le(s) paramètre(s) d'entrée et le(s) paramètre(s) de sortie (*analyse du texte décrivant le système*) ;
3. A l'aide du théorème de Chasles, exprimer le vecteur nul en fonction des vecteurs liant les centres de chacune des liaisons formant l'une des boucles de la chaîne fermée;
4. Projeter la relation vectorielle sur une des bases ;
5. Combiner les relations pour exprimer le(s) paramètre(s) de sortie en fonction du(des) paramètre(s) d'entrée ;

6.2. Application pour chaîne fermée (Système bielle-manivelle)

Remarque : on considère ici que la rotation de la manivelle S_1 / S_0 entraîne la translation alternative du piston S_3 / S_0 ... Ceci correspond par exemple au cas d'une pompe. Dans l'autre cas, correspondant par exemple au cas d'un moteur à explosion, la rotation de la manivelle S_1 / S_0 est le résultat de la translation alternative du piston S_3 / S_0 .

Ce dernier cas pourrait être traité en guise de travail à la maison par les étudiants.



Etape 1 :

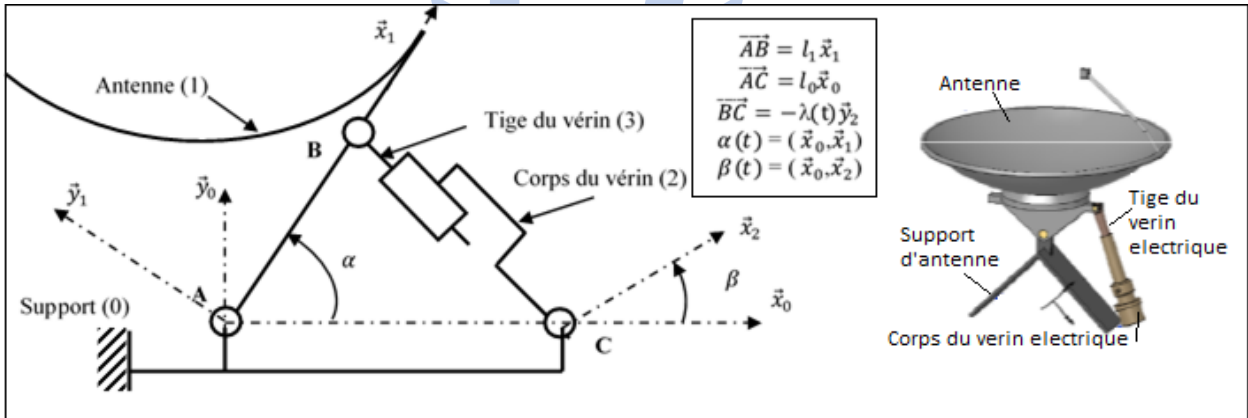
Etape 2 :

Etape 3 :

Etape 4 :

Etape 5 :

Application 1 : Le système d'orientation d'antenne ci-dessous permet, grâce à une télécommande, de régler l'orientation de sa parabole afin d'optimiser la réception des chaînes de télévision. Pour cela, le moteur du vérin électrique est alimenté de façon à faire rentrer ou sortir la tige et obtenir ainsi la position de l'antenne désirée. Le dispositif est représenté ci-dessous sous la forme d'un schéma cinématique.



$\alpha(t)$: paramètre de mouvement de l'antenne 1 par rapport au support 0.

$\beta(t)$: paramètre de mouvement du corps 2 par rapport au support 0.

$\lambda(t)$: paramètre de mouvement de la tige 3 par rapport au corps 2.

- 1) Donner le graphe de liaison du système ainsi que son type.
- 2) Donner le paramètre d'entrée et le paramètre de sortie du système.
- 3) Déterminer, à l'aide d'une fermeture géométrique, la loi entrée-sortie du système.

Application 2 : Le monte-charge illustré ci-dessous est composé d'un bâti S_0 , de deux tiges S_1 (OA) et S_3 (BC), d'un assemblage soudé S_2 (A, B, D, E) et d'un plateau monte-charge S_4 . La tige S_1 est en liaison pivot d'axe (O, \vec{x}) par rapport à S_0 et est en liaison pivot d'axe (A, \vec{x}) par rapport à S_2 . La tige S_3 est en liaison pivot d'axe (C, \vec{x}) par rapport à S_0 et est en liaison pivot d'axe (B, \vec{x}) par rapport à S_2 . Par ailleurs, S_4 est en liaison glissière d'axe \vec{z} par rapport au bâti S_0 en F et en G et en liaison ponctuelle de normale (E, \vec{z}) par rapport à S_2 en E. La rotation (α) de S_1 par rapport au bâti entraîne la montée (h) du plateau monte-charge S_4 .

$R_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié à S_0 ;

$R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié à S_1 ;

$R_2(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié à S_2 ;

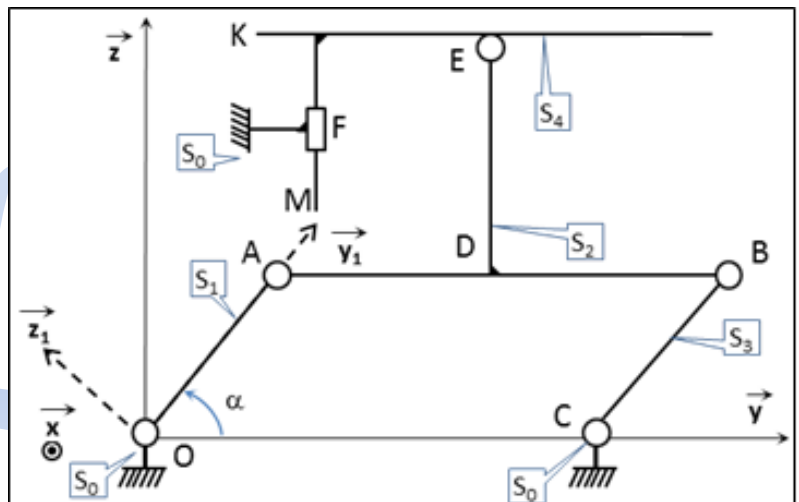
$R_3(C, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié à S_3 et

$R_4(K, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié à S_4

$$\alpha = (\vec{y}, \vec{y}_1) ; \vec{OA} = \vec{CB} = l_1 \vec{y}_1$$

$$\vec{AD} = \vec{DB} = \frac{1}{2} l_2 \vec{y}$$

$$\vec{DE} = k \vec{z} ; \vec{OE} = m(t) \vec{y} + h(t) \vec{z}$$



- 1- Représenter le graphe de liaison du système et donner son type
- 2- Donner la loi d'entrée sortie du système en utilisant la méthode de la fermeture géométrique