Chapitre 1 — MODELISATION ET PARAMETRAGE DES SYSTEMES MECANIQUES

La version initiale de ce document est un travail commun de l'auteur avec les professeurs Maher Dammak et Mohamed Maatar de l'IPEIS

OBJECTIFS

Au terme de ce chapitre l'étudiant devrait être capable de :

- Identifier le paramétrage d'une liaison élémentaire ;
- Lire un schéma cinématique afin de comprendre le principe de fonctionnement ;
- Etablir le graphe des liaisons à partir d'un schéma cinématique ;
- Etablir les relations scalaires indépendantes qui découlent de la condition géométrique de la fermeture des chaînes cinématiques ;
- Déterminer la loi "Entrée-Sortie".

CONTENU :

1. Définitions et postulats

Intérêt et définition de la cinématique : La cinématique est l'étude des …………………… indépendamment des causes qui les produisent. Comparativement à la géométrie qui repose uniquement sur la notion de l'espace, la cinématique introduit un autre concept : ……………….. Ce paramètre sert à repérer une position particulière d'un corps parmi toutes celles qu'il a occupées. Ainsi, en cinématique, on étudie les relations : ……….…..-………………

Points matériels : L'espace physique est euclidien à trois dimensions. Tout système mécanique peut être représenté dans cet espace par un ensemble de points de cet espace. Ces points sont appelés points matériels.

Système mécanique : On appelle système mécanique toute partie de l'univers que l'on choisit par la pensée dans le but de l'étudier et ce, en prenant soin de bien l'isoler. Un système isolé est un système dont la frontière séparant son intérieur de son extérieur est bien définie.

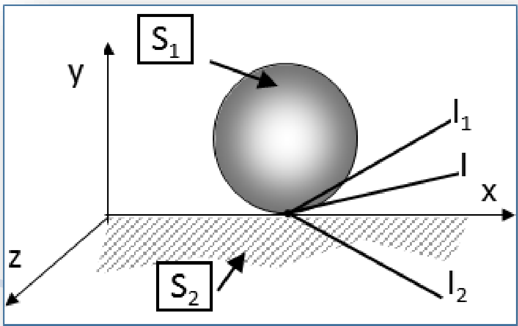
Référentiel de mouvement : Un référentiel de mouvement est constitué par l'ensemble "repère de l'espace physique" et "repère de temps".

Solide rigide : On appelle solide rigide un système mécanique Σ tel que la distance entre deux points quelconques lui appartenant reste invariante au cours du temps, i.e. : $\forall M \in \Sigma, \forall N \in \Sigma,$ ……………………………………, $\forall t$

Mouvement : Le solide S_1 et en mouvement par rapport au solide S_2 si les distances de 3 points quelconques de S_1 à 3 points quelconques de S_2 varient au cours du temps. Le cas échéant, on dira que S_1 est au repos par rapport à S_2. De plus, on définit un repère R_0 comme étant un repère lié au solide S_0 si tous les points matériels de S_0 sont fixes dans R_0. Ainsi, la notion de mouvement est relative. Aussi, si R_0 et R_1 sont deux repères liés respectivement aux solide S_0 et S_1, étudier le mouvement relatif de S_0 par rapport à S_1 revient à étudier celui de R_0 par rapport à R_1.

Solide libre : Un solide est dit libre si aucune restriction n'est apportée à ses possibilités de mouvement. Le cas échéant, on dira qu'il est soumis à des liaisons. Les liaisons élémentaires sont définies à la section 3 de ce chapitre.

Point coïncidant : Soit P un point mobile par rapport à R_0 et t_0 un instant donné. Soit P_0 le point de R_0 (fixe dans R_0) tel que : $\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{OP(t_0)}$.
Le point P_0 est appelé point coïncidant de P à $t = t_0$.



Point géométrique : Le point géométrique est un point qui joue un rôle important bien que n'appartenant à aucun solide. Dans l'exemple de la figure ci-contre, à l'instant t et à l'endroit du contact, on distingue :

- I: point ……………………… de contact
- I_1: point ……………………… appartenant à S_1.
- I_2: point ……………………… appartenant à S_2.

2. Paramétrage de la position d'un solide par rapport à un repère

Soient deux repères de l'espace R $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et R' $(O',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$. Les deux repères R et R' sont indéformables au cours du temps. De ce fait, ils peuvent être considérés comme deux solides S et S'. Repérer R par rapport R' revient à repérer S par rapport S'. Pour ce faire, il faudrait:

2.1. Repérer un point de R'/R

Choisissons l'origine de R' comme le point à repérer dans R. Trois paramètres sont nécessaires pour repérer O'.

$\overrightarrow{OO'} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$; ***Note :*** Tout point matériel possède ….. degrés de liberté.

2.2. Repérer l'orientation de R'/R

Méthode 1 [Utilisation des cosinus directeurs] : Les vecteurs de base de R' sont exprimés dans R à l'aide de neuf paramètres (trois cosinus directeurs pour chacun) entre lesquels existent six relations trois de normalité et trois d'orthogonalité):

$$\begin{cases} \vec{i}' = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \\ \vec{j}' = d\vec{i} + e\vec{j} + f\vec{k} \\ \vec{k}' = g\vec{i} + h\vec{j} + l\vec{k} \end{cases} \quad avec \quad \begin{cases} \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \\ \\ \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

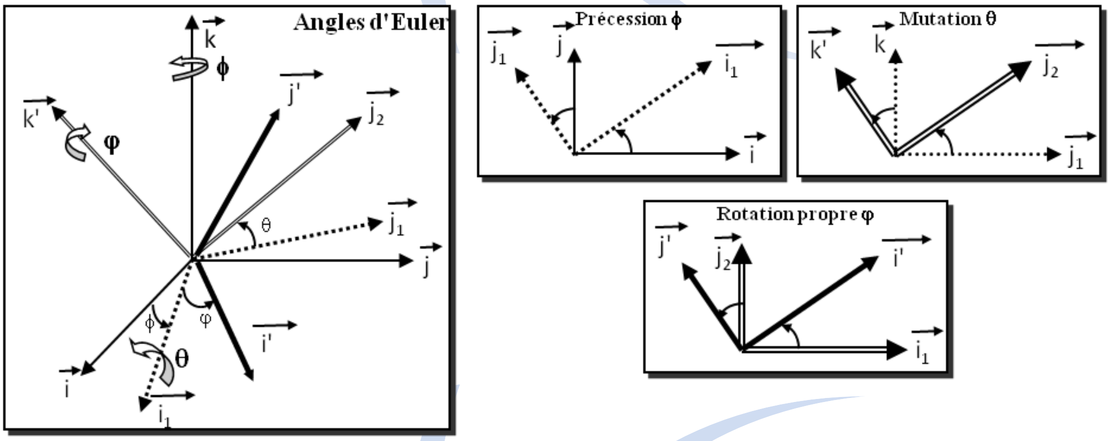
Ceci réduit le nombre des paramètres nécessaires au repérage de l'orientation de R' à ……. paramètres indépendants et le nombre de paramètres nécessaire au repérage complet de R' à …… paramètres.

Méthode 2 [Utilisation des angles d'Euler] : Cette méthode permet de définir les trois paramètres nécessaires à l'orientation de R' dans R comme étant les angles de trois rotations successives permettant de passer de R à R' (en passant par deux repères intermédiaires R_1 et R_2):

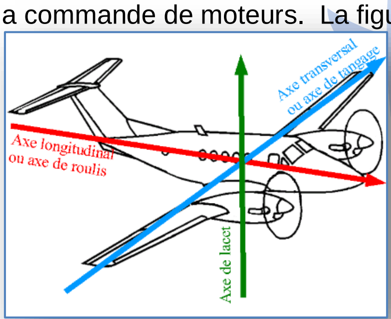
$$R(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}) \xrightarrow{\text{rotation d'un angle } \phi \text{ autour de l'axe } (O,\vec{k})} R_1(o,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k})$$

$$R_1(o,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}) \xrightarrow{\text{rotation d'un angle } \theta \text{ autour de l'axe } (O,\vec{i}_1)} R_2(o,\vec{i}_1,\vec{j}_2,\vec{k}')$$

$$R_2(o,\vec{i}_1,\vec{j}_2,\vec{k}') \xrightarrow{\text{rotation d'un angle } \varphi \text{ autour de l'axe } (O,\vec{k}')} R'(o,\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$$



- Méthode 3 [Utilisation des angles de Cardan] : Cette méthode, utilisée surtout en robotique ou pour la navigation (maritime / aéronautique) met en œuvre des paramètres directement utilisables en pratique pour la commande de moteurs. La figure ci-dessous illustre ce principe pour le pilotage d'un avion :

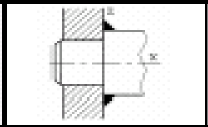
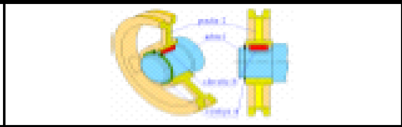
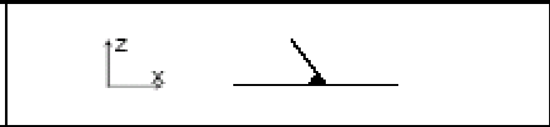
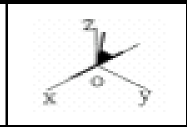
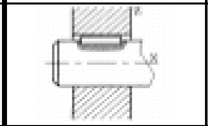
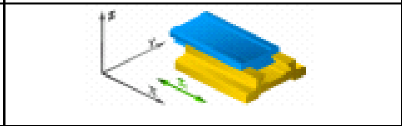
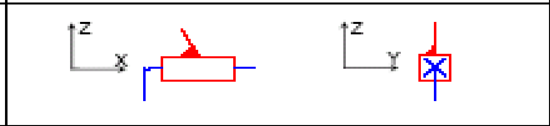
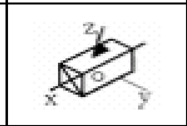
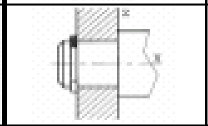
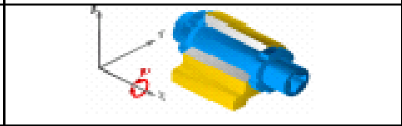
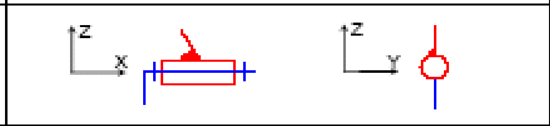
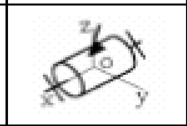
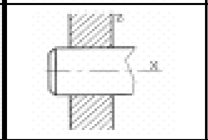
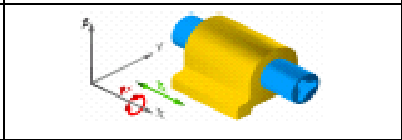
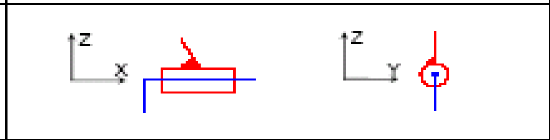
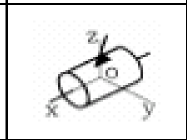
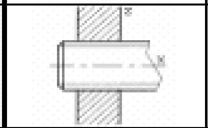
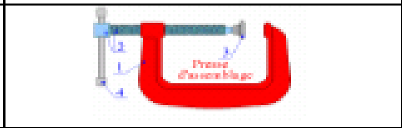
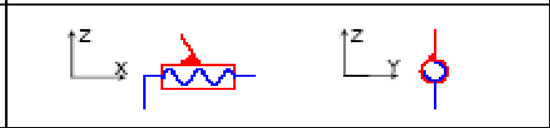
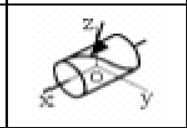
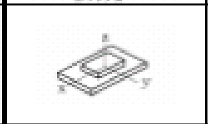
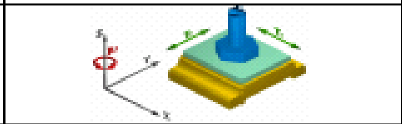
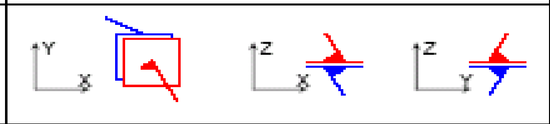
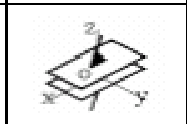
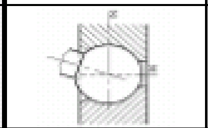
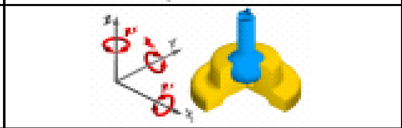
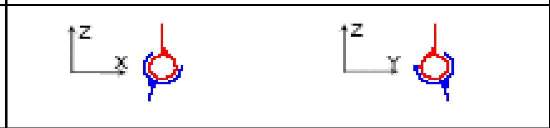
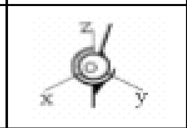
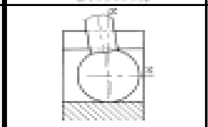
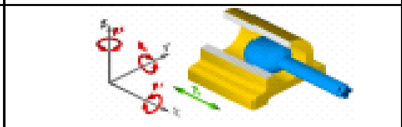
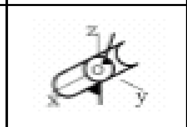
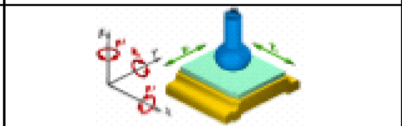
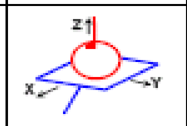
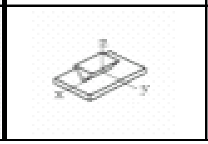
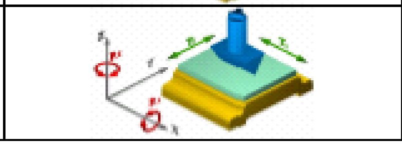
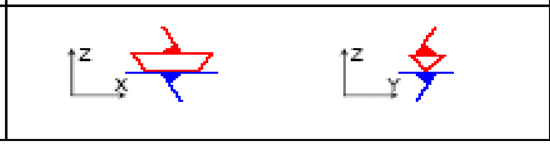
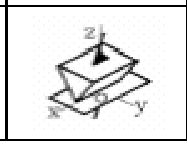


Paramètre 1 (ANGLE DE LACET) : mesuré autour de $\overrightarrow{z_0}$
Rotation donnant le repère intermédiaire ($\overrightarrow{x_1}$; $\overrightarrow{y_1}$; $\overrightarrow{z_0}$)

Paramètre 2 (ANGLE DE TANGAGE) : mesuré autour de $\overrightarrow{y_1}$
Rotation donnant le repère intermédiaire ($\overrightarrow{x'}$; $\overrightarrow{y_1}$; $\overrightarrow{z_2}$)

Paramètre 3 (ANGLE DE Roulis) : mesuré autour de $\overrightarrow{x'}$
Rotation donnant le repère final ($\overrightarrow{x'}$; $\overrightarrow{y'}$; $\overrightarrow{z'}$)

3. Liaisons élémentaires

LIAISONS ELEMENTAIRES	exemple	Exemples	Représentation plane	Représentation en perspective	Degrés de mobilité	Degrés de liaison	Tableau des mobilités
Liaison encastrement					0	6	T R 0 0 0 0 0 0
Liaison glissière					1	5	T R 1 0 0 0 0 0
Liaison pivot					1	5	T R 0 1 0 0 0 0
Liaison pivot glissant					2	4	T R 1 1 0 0 0 0
Liaison glissière hélicoïdale					2 conjuguées	4	T R 1 1 0 0 0 0
Liaison plane					3	3	T R 1 0 1 0 0 1
Liaison rotule					3	3	T R 0 1 0 1 0 1
Liaison linéaire annulaire					4	2	T R 1 1 0 1 0 1
Liaison ponctuelle					5	1	T R 1 1 1 1 0 1
Liaison linéaire rectiligne					4	2	T R 1 1 1 0 0 1

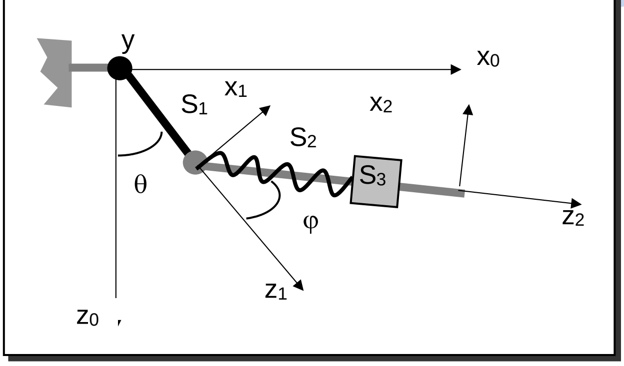
4. Paramètres d'un système

On appelle paramètres d'un système mécanique l'ensemble des n variables qui permettent d'obtenir les coordonnées de tout point du système par rapport au repère R_0.

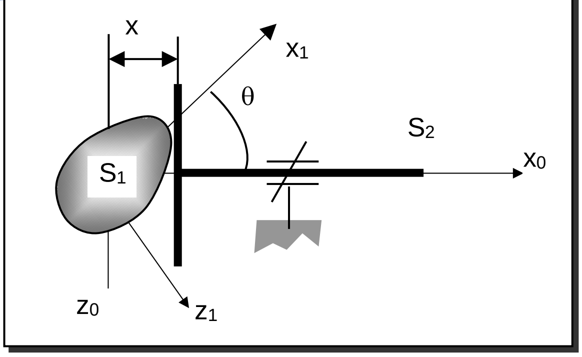
Dans le premier exemple ci-dessous (à gauche), les paramètres du système $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ sont d, θ et φ.

Quant au deuxième exemple (à droite), les paramètres sont x et θ.

Paramètres d'un système (ex. 1)



Paramètres d'un système (ex. 2)



Note 1: Si les paramètres peuvent avoir des valeurs arbitraires (tout en respectant les hypothèses de fonctionnement du mécanisme), ils sont dit indépendants (cas de l'exemple 1). Le cas échéant ils sont dits dépendants (cas de l'exemple 2).

Note 2: Le nombre et le choix des paramètres n'est pas toujours évident. Il dépend surtout du but à atteindre par l'étude du système.

5. Lecture d'un schéma cinématique

5.1. Classe d'équivalence

On appelle classe d'équivalence, un ensemble de solides d'un mécanisme solidaires les unes des autres pendant la phase de fonctionnement considérée. On dit aussi qu'elles sont liées par une liaison ………………………… ou aussi qu'elles sont sans aucun ……………………………….. .

5.2. Schéma cinématique

Afin de comprendre le fonctionnement d'un système mécanique, la lecture du dessin d'ensemble peut s'avérer peu aisée et il est utile d'en simplifier la représentation. Par ailleurs, lorsque le système est encore en phase de conception, on pourrait avoir besoin d'un schéma illustrant le fonctionnement attendu sans toutefois limiter le concepteur dans les formes et dimensions à concevoir. Il s'agit du schéma cinématique. Ce schéma est dit minimal quand il représente un mécanisme avec au plus une liaison mécanique entre deux solides ou classe d'équivalence. Ainsi, le schéma cinématique a deux fonctions principales en mécanique:

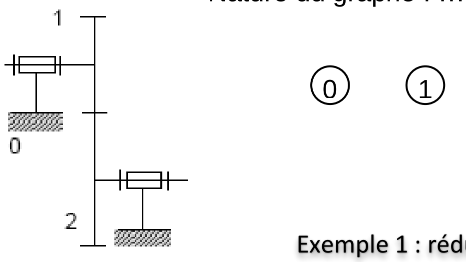
- aide à la conception, en donnant le principe cinématique de fonctionnement.
- aide à la compréhension du dispositif existant.

5.3. Graphe de liaisons

Il s'agit d'un outil mathématique constitué de nœuds représentant les classes d'éq uivalence et d'arcs représentant les liaisons mécaniques. On parle d'un graphe de liaison …………………… s'il ne comporte aucune boucle. Il est dit ………………… s'il en comporte exactement une et ………………………. s'il en comporte plus.

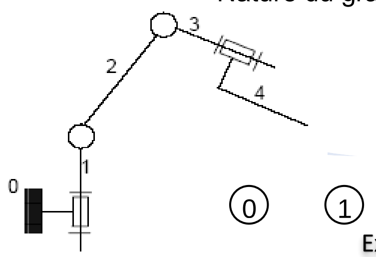
Exemple : Complétez les graphes ci-dessous et identifiez leur types.

Nature du graphe : …………………..



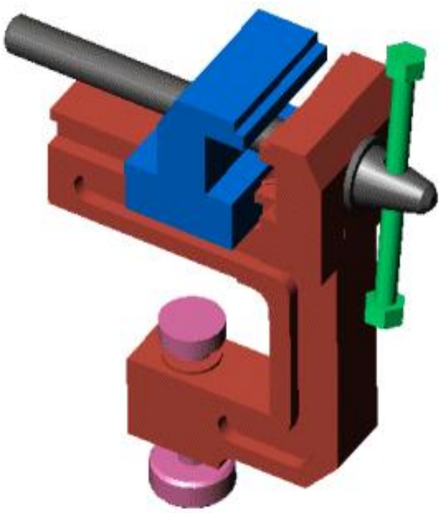
Exemple 1 : réducteur de vitesse

Nature du graphe : …………………..

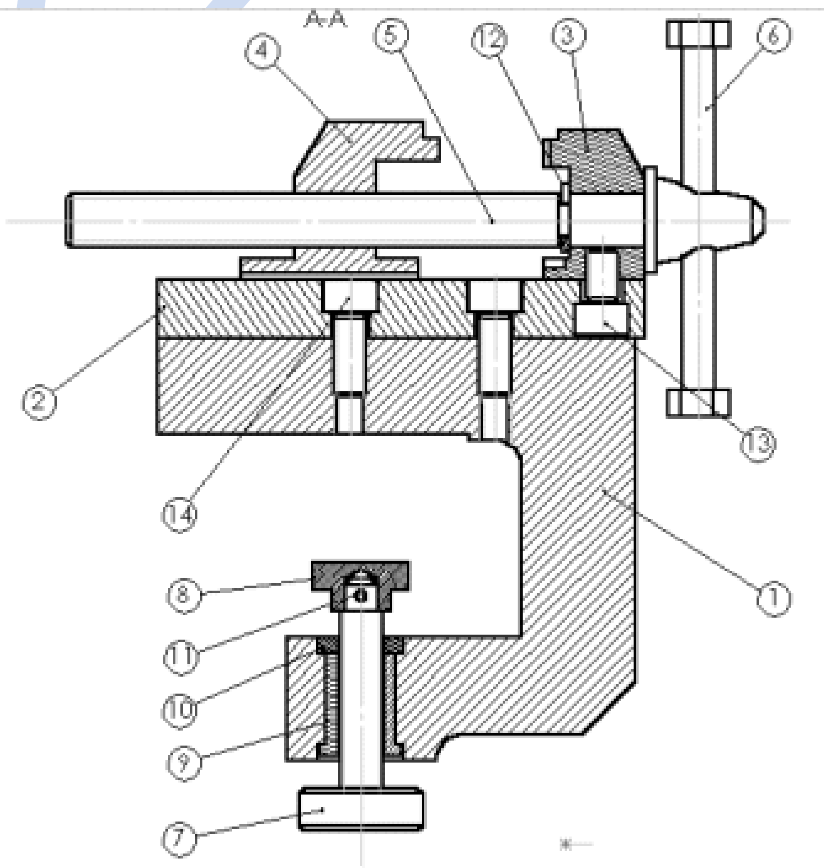


Exemple 2 : bras de robot

Exemple : Etau



Perspective (modèle solide)



Dessin d'ensemble

A = { 1, 2, 3, 9, 10, 13, 14}

B = { 4}

C = {5, 12}

D = {6}

E = { 7, 8, 11}

Classes d'équivalence

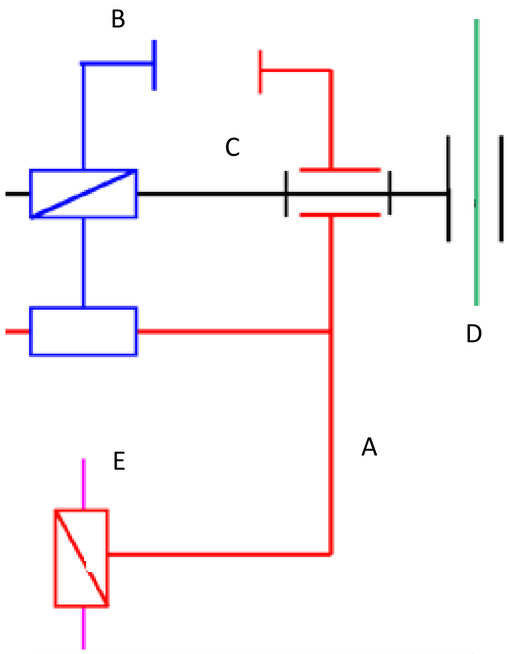
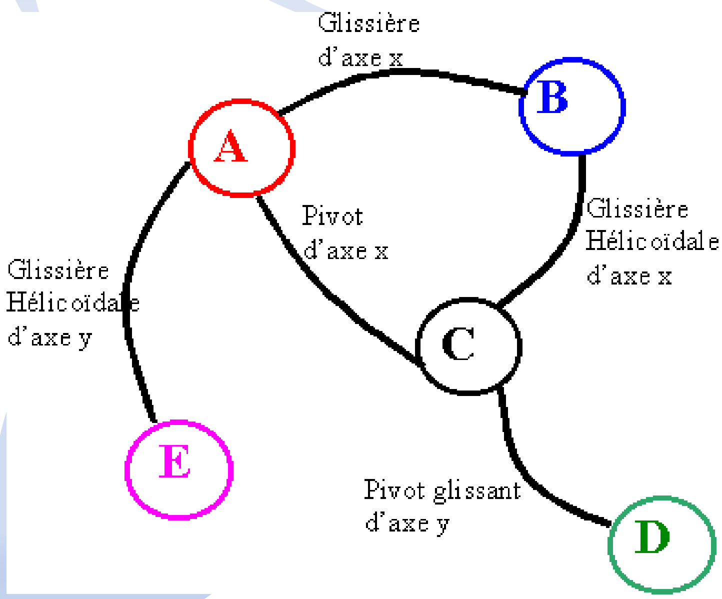


Schéma cinématique



Graphe de liaison

6. Loi d'entrée sortie

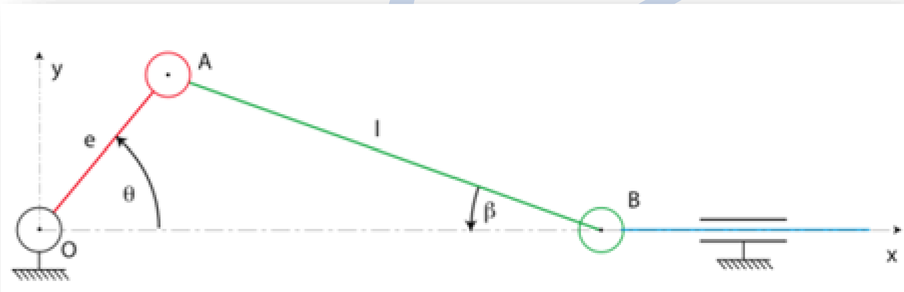
6.1. Définition de base (pour chaine fermée)

Un système se présentant sous forme d'une chaîne de solide fermée a pour but de transformer un mouvement. On s'intéresse alors pour cela à la relation cinématique liant le mouvement d'entrée (*input, action de l'opérateur ou de l'actionneur*, ...) du système et le mouvement de sortie (*output, conséquences, résultats, mouvement attendus*, …). Pour établir cette loi, on suit la procédure suivante basée sur la fermeture de la chaîne géométrique (étape 3) :

1. Paramétrer le mécanisme (donné à l'étudiant) ;
2. Identifier la grandeur d'entrée et de sortie (analyse du texte décrivant le système) ;
3. A l'aide du théorème de Chasles, exprimer le vecteur nul en fonction des vecteurs liant le <u>centre</u> de <u>chacune</u> des liaisons ;
4. Projeter la relation vectorielle sur une des bases ;
5. Combiner les relations pour exprimer le paramètre de sortie en fonction du paramètre d'entrée ;

6.2. Application pour chaine fermée (Système bielle-manivelle)

Remarque : on considère ici que la rotation entraine la translation (exemple d'une pompe) et pas l'inverse (exemple d'u moteur à explosion)



<u>Etape 1 :</u> ....

....

<u>Etape 2 :</u> ....

....

<u>Etape 3 :</u> ....

....

<u>Etape 4 :</u> ....

....

....

....

<u>Etape 5 :</u> ....

....

....

....

6.3. Cas spécial des chaines ouvertes :

Pour ces chaines, le terme « loi entrée/sortie » désigne la relation entre :

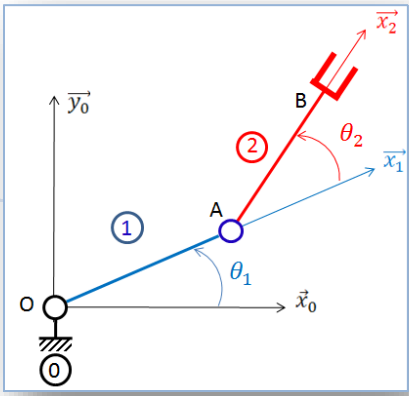
- les paramètres pilotant les actionneurs

et

- les coordonnées opérationnelles du point qui se trouve au bout de la chaine.

Elle est obtenue par de simples relations trigonométriques.

6.4. Application pour chaine ouverte (pince de robot)



On considère un modelé plan simple où la pince du robot est animée par deux mouvements de rotation θ_1 et θ_2.

Chaque bras du robot est de longueur L. La loi entrée/sortie désigne la relation entre les paramètres pilotant les actionneurs et les coordonnées opérationnelles du point B: x et y tels que $\overrightarrow{OB} = x\vec{x_0} + y\vec{y_0}$

Càd :

$$\begin{cases} x = f(\theta_1;\ \theta_2) \\ y = f(\theta_1;\ \theta_2) \end{cases} \text{ relation directe}$$

$$\begin{cases} \theta_1 = f(x; y) \\ \theta_2 = f(x; y) \end{cases} \text{ relation indirecte}$$

1/ établissez la relation directe $\begin{cases} x = f(\theta_1;\ \theta_2) \\ y = f(\theta_1;\ \theta_2) \end{cases}$

2/ A partir du modèle géométrique direct montrer que le modèle indirect du bras manipulateur, est défini par les équations suivantes

$$\begin{cases} \theta_2 = \arccos\left(\frac{x^2+y^2}{2L^2} - 1\right) \\ \theta_1 = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{\theta_2}{2} \end{cases}$$

Vous prouvez utiliser les relations trigonométrique suivantes :

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2} . \cos\frac{a-b}{2} \quad ; \quad \sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2} . \cos\frac{a-b}{2} \qquad \cos^2 a + \sin^2 a = 1 \quad ; \quad \cos^2 a = \frac{1+\cos a}{2}$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

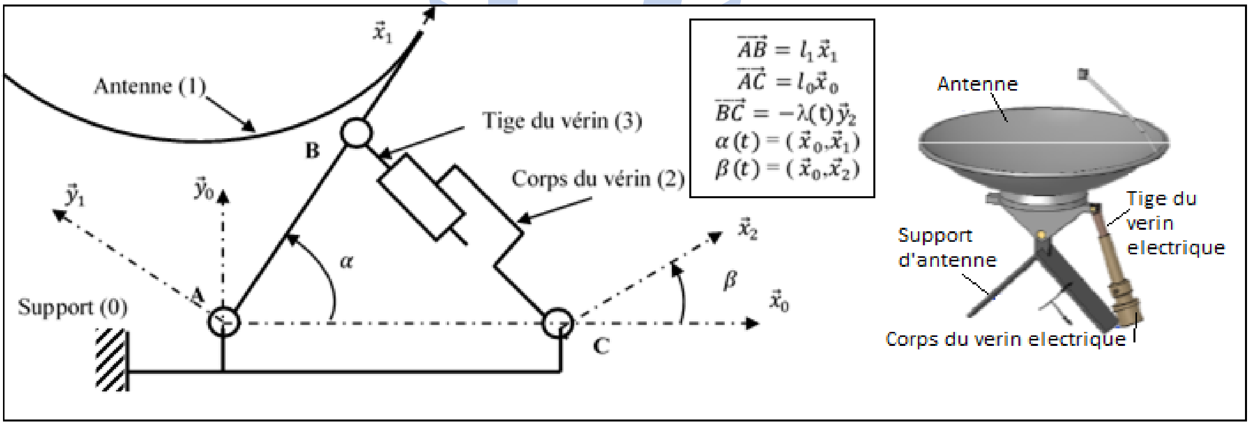
....

....

....

Application 1 : Le système d'orientation d'antenne ci-dessous permet, grâce à une télécommande, de régler l'orientation de sa parabole afin d'optimiser la réception des chaînes de télévision. Pour cela, le moteur du vérin électrique est alimenté de façon à faire rentrer ou sortir la tige et obtenir ainsi la position de l'antenne désirée.

Le dispositif est représenté ci-dessous sous la forme d'un schéma cinématique.



α (t) : paramètre de mouvement de l'antenne 1 par rapport au support 0.

β (t) : paramètre de mouvement du corps 2 par rapport au support 0.

λ (t) : paramètre de mouvement de la tige 3 par rapport au corps 2.

1) Donner le graphe de liaison du système ainsi que son type.

2) Donner le paramètre d'entrée et le paramètre de sortie du système.

3) Déterminer, à l'aide d'une fermeture géométrique, la loi entrée-sortie du système.

Application 2 : Le monte-charge illustré ci-dessous est composé d'un bâti S_0, de deux tiges S_1 (OA) et S_3 (BC), d'un assemblage soudé S_2 (A, B, D, E) et d'un plateau monte-charge S_4. La tige S_1 est en liaison pivot d'axe $(O,\vec{x})$ par rapport à S_0 et est en liaison pivot d'axe $(A,\vec{x})$ par rapport à S_2. La tige S_3 est en liaison pivot d'axe $(C,\vec{x})$ par rapport à S_0 et est en liaison pivot d'axe $(B,\vec{x})$ par rapport à S_2. Par ailleurs, S_4 et en liaison glissière d'axe $\vec{z}$ par rapport au bâti S_0 en F et en G et en liaison ponctuelle de normale $(E,\vec{z})$ par rapport à S_2 en E. La rotation (α) de S_1 par rapport au bâti entraine la montée (h) du plateau monte-charge S_4 .

$R_0(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est lié à S_0 ;

$R_1\ (O,\vec{x},\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ est lié à S_1 ;

$R_2\ (A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est lié à S_2 ;

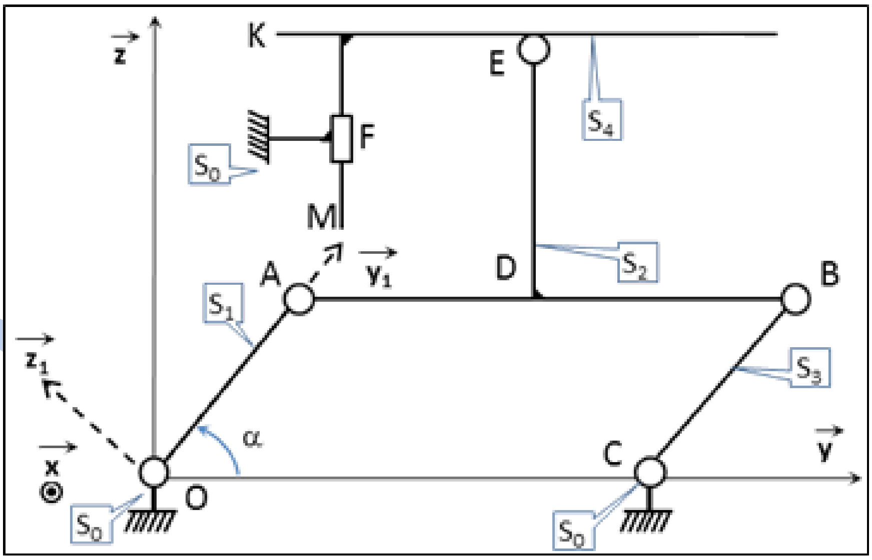
$R_3\ (C,\vec{x},\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ est lié à S_3 et

$R_4\ (K,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est lié à S_4

$\alpha = (\vec{y},\vec{y_1})$; $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} = l_1\ \vec{y_1}$

; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\ l_2\ \vec{y}$

$\overrightarrow{DE} = k\ \vec{z}$; $\overrightarrow{OE} = m(t)\ \vec{y} + h(t)\ \vec{z}$



1- Représenter le graphe de liaison du système et donner son type

2- Donner la loi d'entrée sortie du système en utilisant la méthode de la fermeture géométrique